Université Mouloud Mammeri
Faculté du Génie de la Construction

Maths 3 (Section A & B) 2019/2020

Intégrales multiples

1 Intégrales simples

Rappelons que l'inégrale simple $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est le résultat d'une démarche en quatre étapes.

Etape 1 Découper $[a, b]$ par les points $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
Etape 2 Choisir pour chaque k un nombre quelconque w_k dans le sous intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.
Etape 3 Former la somme de Riemann $\displaystyle\sum_k f(w_k)\Delta x_k$ où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
Etape 4 Définir (si la limite existe)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(w_k)\Delta x_k$$

où $\|d\|$ est le pas du découpage (le plus grand des Δx_k).

La première partie du théorème suivant met en évidence le résultat remarquable que pour une fonction continue quelconque f, G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ en est une primitive. La deuxième partie montre comment n'importe quelle primitive permet de calculer le nombre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 1

Supposons que f soit une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$.
Partie 1 Si G est la fonction définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

pour tout x dans $[a, b]$, G est une primitive de f sur $[a, b]$.
Partie II Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple 1 Calculer l'aire de la région située entre les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

Le dessin nous aide à écrire que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exemple 2 Calculer l'aire de la région située entre les courbes $y + x^2 = 6$ et $y + 2x - 3 = 0$.

Les courbes $y = 6 - x^2$ et $y = -2x + 3$ se coupent en (-1,5) et (3, -3) et comme $(6 - x^2) - (-2x + 3) \geq 0$ l'aire en question est donnée par

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 [(6 - x^2) - (-2x + 3)]\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x)\mathrm{d}x \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 3 Calculer l'aire de la région R délimitée parles graphiques $y - x - 6 = 0$, $y - x^3 = 0$ et $2y + x = 0$.

Le déssin montre que la frontière inférieure se compose de deux graphiques différents ce qui nécessite de décomposer R en deux régions R_1 et R_2. Les aires A_1 et A_2 de R_1 et R_2 sont données par

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-4}^0 [(6 + x) - (-\frac{1}{2}x)]\mathrm{d}x \\ &= \int_{-4}^0 (\frac{3}{2}x + 6)\mathrm{d}x = 12 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^2 [(x + 6) - x^3]\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 10. \end{aligned}$$

L'aire de la région R toute entière est alors $A = A_1 + A_2 = 22$.

2 Intégrales doubles

Une démarche en quatre étapes analogue à celle que nous venons de rappeler à propos de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ permet de définir l'intégrale double $\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A$ d'une fonction de deux variables f définie sur une région du plan des xOy.

Soit f une fonction de deux variables définie sur une région R du plan des (x,y). L'intégrale double de f sur R, notée $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, est le résultat d'une démarche en quatre étapes analogue à celle de l'intégrale simple.

Etape 1 Découper la région R en rectangles R_1, R_2, ..., R_n, appelés élèments d'aires, qui se trouvent entiérement inclus dans R.
Etape 2 Choisir pour chaque k, (u_k, v_k) dans R_k.
Etape 3 Former la somme de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k)\Delta A_k$ où ΔA_k est l'aire de R_k.
Etape 4 Définir (si la limite existe)

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\Delta A_k$$

où $\|d\|$ est le pas du découpage (la plus longue des diagonales des R_k).

Remarques
1. Quand l'intégrale double de f sur R existe, f est dite intégrale sur R. On démontre en analyse approfondie qu'une condition suffisante à cela est **la continuité de** f sur R.
2. Le produit $f(u_k, v_k)\Delta A_k$ est égal au volume du prisme infinitésimal de base ΔA_k et de hauteur $f(u_k, v_k)$. La somme de tous ces prismes constitue une approximation du volumes V du solide qui se trouve sous le graphique de $z = f(x,y)$ et au dessus de R. Comme cette approximation s'améliore à mesure que $\|d|$ s'approche de 0. Cela donne l'énoncé suivant.

Définition 1

Soit f une fonction de deux variables continues et positive pour tout (x,y) d'une région R. Le volume V du solide qui se trouve sous le graphique de $z = f(x,y)$ et au dessus de R est

$$V = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Si, à l'inverse, $f(x,y) \leq 0$ sur R, l'intégrale double de f sur R est l'opposé du volume situé au dessus du graphique de f et sous la région de R.

Le théorème suivant énumère sans démonstration quelques propriétés des intégrales doubles analogues à celles des intégrales simples.

Théorème 2

(1) $\iint_R cf(x,y)\mathrm{d}A = c\iint_R cf(x,y)\mathrm{d}A$ quel que soit c réel.
(2) $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\mathrm{d}A = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_R g(x,y)\mathrm{d}A.$
(3) Si R est la réunion de deux régions R_1 et R_2 qui ne se chevauchent pas,

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}A$$

(4) Quand $f(x,y) \geq 0$ sur tout R, $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A \geq 0.$

Dans le cas le plus simple d'une fonction continue sur un rectangle fermé la définition suivante simplifie les notations et le calcul des intégrales.

Définition 2

$$(1) \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$(2) \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Exemple 1 Calculer $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x+6x^2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

La définition ci-dessus conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x+6x^2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2x+6x^2y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left[2xy+6x^2\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-1}^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 [(4x+12x^2)-(-2x+3x^2)]\mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 (6x+9x^2)\mathrm{d}x \\
&= [3x^2+3x^3]_1^4 = 234.
\end{aligned}$$

Exemple 2 Calculer $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x+6x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La définition ci-dessus conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x+6x^2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2x+6x^2y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^2 \left[2\left(\frac{x^2}{2}\right)+6\left(\frac{x^3}{3}\right)y\right]_1^4 \mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^2 [(16+128y)-(1+2y)]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^2 (126y+15)\mathrm{d}y \\
&= [63y^2+15y]_{-1}^2 = 234.
\end{aligned}$$

Le fait que la réponse des exemples 1 et 2 soit la même n'est pas dû au hasard. Les deux intégrales itérées sont toujours égales lorsque f est continue. Il est donc légitime d'échanger l'ordre des deux intégrations.

Une intégrale double itérée sur un domaine de type R_x ou R_y est définie de la façon suivante.

Définition 3

$$(1) \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$(2) \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Exemple 3. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

La définition 3(1) conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left[(x^3y+2y^2)\right]_{x^2}^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 [(2x^4+8x^2)-(x^5+2x^4)]\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right] = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Exemple 4. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y\cos x\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x &= \int_1^3 [\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^3 2y(\sin y^2 - \frac{1}{2})\mathrm{d}y \\
&= \int_1^3 (2y\sin y^2 - y)\mathrm{d}y \\
&= \left[-\cos y^2 - \frac{1}{2}y^2\right]_1^3 \\
&= (-\cos 9 - \frac{9}{2}) - (-\cos 1 - \frac{1}{2}) \simeq -2,55.
\end{aligned}$$

Le théorème suivant établit que le nombre $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ tel qu'il a été défini précédemment peut être calculé par une intégrale itérée dans le cas où R est du type R_x ou R_y.

Théorème 3

(1) Soit R une région du type R_x. Si f est continue sur R, alors

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

(2) Soit R une région du type R_y. Si f est continue sur R, alors

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Remarque. Une région R qui serait de forme plus compliquée devrait d'abord être subdivisée en sous-régions de type R_x ou R_y sur chacune desquelles l'intégrale double pourrait être calculée par une intégrale itérée. Les différentes valeurs obtenues sont alors à additionner.

Exemple 5. Soit R la région du plan xOy délimitée par les graphes $y = x^2$ et $y = 2x$. Calculer $\iint_R (x^3 + 4^y)\mathrm{d}A$ en regardant d'abord R comme (i) une région de type R_x puis comme (ii) une région de type R_y.

(i) Le dessin ci-dessous montre la région R, qui est à la fois de type R_x et R_y. Ainsi, suivant le théorème précédent 3(1),

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^3+y^4)\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[x^3y+2y^2\right]_{x^2}^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 [(2x^4+8x^2)-(x^5+2x^4)]\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6\right] = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

(ii) Regardons maintenant R comme une région de type R_y dont l'équation des frontières s'obtient en résolvant les équations données par rapport à x

$$x=\frac{1}{2}y \quad \text{et} \quad x=\sqrt{y} \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Suivant le théorème précèdent 3(2),

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^3+y^4)\mathrm{d}A &= \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^3+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^3+4y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^4}{4}+4xy\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 [(\frac{1}{4}y^2+4y^{\frac{3}{2}})-(\frac{y^4}{64}+2y^2)]\mathrm{d}y = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Exemple 6. Soit R la région délimitée par les graphiques des équations $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x-18}$ et $y=0$. En supposant que f soit une fonction continue sur R, exprimer $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ sous forme d'intégrales itérées selon (i) le théorème 3 (1) et (ii) le théorème 3 (2).

(i) Sous le point de vue du théorème 3(1) il est nécessaire de découper R en deux régions R_1 et R_2. Ce sont des régions de types R_x et donc

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A &= \iint_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}A \\
&= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(ii) Sous le point de vue du théorème 3(2) résolvons chacune des équations par rapport à x, ce qui donne

$$x=y^2 \quad \text{et} \quad x=\frac{y^2+18}{3}=\frac{1}{3}y^2+6 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq 3.$$

La région étant une région de type R_y, une seule intégrale itérée suffit :

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_0^3 \int_{y^2}^{\frac{y^2}{3}+6} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Remarque. Les exemples 5 et 6 montrent que certaines intégrales peuvent être calculées tant par le thm 3(1) que par le thm 3(2). Le choix de l'*ordre d'intégration* dxdy ou dydx dépend essentiellement de la fonction f et la région R. Comme il peut arriver que certaines intégrales itérées soient particulièrement difficile sinon impossible à calculer, on peut essayer d'*échanger* l'ordre des deux intégrations en espérant que l'intégrale itérée de l'autre ordre soit plus facile à calculer. L'exemple suivant illustre ce problème.

Exemple 7 Calculer $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ après avoir échangé l'ordre des intégrations.

L'ordre dxdy de l'intégrale proposée correspond à une région de type R_y. Mais R est aussi une région de type R_x. Dès lors, par le thm 3(1) et 3(2),

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int \sqrt{y}^2 y \cos x^5 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_0^2 \int_0^{x^2} 2y \cos x^5 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \cos x^5\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^4}{4} \cos x^5 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} \int_0^2 \frac{x^4}{4} \cos x^5 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} \int_0^2 (5x^4) \cos x^5 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} \left[\sin x^5\right]_0^2 = \frac{1}{10} \sin 32 \simeq 0,055.
\end{aligned}$$

3 Aires et volumes

On a vu que $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ mesure le volume qui se trouve sous le solide $z = f(x,y)$ et au dessus de R. On a aussi la possibilité d'utiliser $\iint_R \mathrm{d}A$ pour calculer simplement l'aire du domaine R. Il suffit pour cela de prendre $f(x,y) = 1$. Ainsi l'aire A d'une région R de type R_x est donnée par

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Exemple 1 Calculer l'aire A de la région du plan des xy délimitée par les graphiques de $2y = 16 - x^2$ et $x + 2y = 4$.

La figure ci-dessous montre, si onsidère R comme une région de type R_x, que la frontière inférieure est $y = x - \frac{1}{2}$ et la frontière supérieure $y = 8 - \frac{x^2}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^4 \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-3}^4 [y]_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^4 \left[\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= \left[6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-3}^4 = \frac{343}{12}
\end{aligned}$$

Le calcul d'aire d'une région R de type R_y conduit à intégrer par rapport à x puis par rapport à

y. Ainsi

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d [x]_{h_1(y)}^{h_2(y)}\,\mathrm{d}y = \int_c^d [h_1(y) - h_2(y)]\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Exemple 2 Calculer l'aire A de la région du plan des xy délimitée par les graphiques de $x = y^3$, $x + y = 2$ et $y = 0$.
La région est présentée dans la figure ci-dessous. Ainsi, si on considère R comme une région de type R_x,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (2 - y - y^3)\mathrm{d}y = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Exemple 3 Calculer le volume V de la région qui, dans l'octant des coordonnées positives, est délimitée par le paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ et le plan $2x + y = 2$.

La région est située sous le paraboloïde et au dessus d'une région triangulaire du plan des (x, y) délimitée par les axes et la droite $y = 2 - 2x$ (voir figure ci-dessous).

Suivant la définition avec $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$,

$$A = \iint_R (x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}A.$$

Si dA représente l'aire d'une tranche infinitésimale du découpage, il peut être remplacé par dydx et

$$(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

représente le volume de la tranche infinitésimale. Le volume total recherché est donc la somme de tous ces volumes c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{1}{3} + y\right]_0^{2-2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\frac{-14}{3} + \frac{10}{3} - 5x^2 + \frac{14}{3}x)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{7}{6} + \frac{10}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3}x\right]_0^1 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Remarque. Ce volume aurait pu être calculé en intégrant d'abord par rapport à x, auquel cas l'intégrale itérée s'écrirait $A = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exemple 4 Calculer le volume V de la région, qui dans l'octant des coordonnées positives, est délimitée par les cylindres $x^2 + y^2 = 9$ et $y^2 + z^2 = 9$.

Le solide en question se trouve sous le graphique de $z = \sqrt{9 - y^2}$. Selon la définition 2,

$$V = \iint_R \sqrt{9 - y^2}\mathrm{d}A.$$

Comme dans l'exemple précèdent le volume V est donné par

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \sqrt{9-y^2}\, [x]_0^{\sqrt{9-y^2}}\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 (9-y^2)\mathrm{d}y \\
&= \left[9y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = 18.
\end{aligned}
$$

Remarque. La forme en quart de cercle de la région d'intégration aurait permis une intégrale itérée dont la première intégration aurait été en y, mais les calculs dans cet ordre se seraient avérés beaucoup plus compliqués.

4 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Une démarche similaire à celle utilisée pour définir l'intégrale double $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ sur région R en coodonnées cartésiennes permet de définir une intégrale double de f sur une région R décrite en coordonnées polaires.

Définition 1

On appelle *élément d'aire en coordonnées polaires*, la figure ci dessous en un, la région comprise entre deux arcs de cercles centrés à l'origine, de rayons r_1 et r_2, et deux rayons polaires. Si $\Delta\theta$ désigne la mesure en radians de l'angle intercépté par les deux rayons et $\Delta = r_2 - r_1$, l'aire ΔA de l'élément d'aire en cordonnées polaires est

$$\Delta A = \frac{1}{2}r_2^2\Delta - \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta.$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta A$$

où $\bar{r}$ est le rayon moyen $(r_1 + r_2)/2$.

Considérons maintenant une région comme celle de la figure ci-dessous, délimitée par deux rayons qui font des angles positifs α et β avec l'axe polaire et les graphiques des deux équations polaires $r = g_1(\theta)$ et $r = g_2(\theta)$ où il est supposé que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ pour $\alpha \leq \beta$.
L'ensemble de tous les éléments d'aires R_1, R_2, ..., R_n entiérement inclus dans R constitue un découpage polaire intérieur d de R. Le pas $\|d\|$ est la longueur de la plus longue des diagonales des R_k. Choisissons, pour chaque k, (r_k, θ_k) dans R_k tel que r_k soit le rayon moyen ; on alors

$$\Delta A_k = r_k\Delta r_k\Delta\theta_k.$$

On démontre le résultat suivant dans l'hypothèse où f est une fonction continue des variables polaires r et θ.

Théorème 5

$$\lim_{\|d\|\to 0}\sum_k f(r_k,\theta_k)r_k\Delta r_k\Delta\theta_k = \iint_R f(r,\theta)\mathrm{d}A\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 1 Calculer l'aire de la région R située à l'extérieur dur cercle $r = a$ et à l'intérieur du cercle $r = 2a\sin\theta$.

La figure ci-dessous montre la région R délimitée par la frontière inférieure $r = a$ et la frontière extérieure $r = 2a\sin\theta$ où $\frac{\pi}{6} \le \theta \le 5\frac{\pi}{6}$. Avec $f(r,\theta) = 1$, le théorème 5 donne

$$A = \iint_R \mathrm{d}A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}}\int_a^{2a\sin\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

La symétrie de la région par rapport à l'axe des ordonnées autorise à écrire

$$\begin{aligned}
A &= \iint_R \mathrm{d}A = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{2a\sin\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{2}r^2]_a^{2a\sin\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(4a^2\sin^2\theta - a^2)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(4\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 1)\mathrm{d}\theta = a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2[\theta - \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2[(\frac{\pi}{2} - 0) - (\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})] \\
&= a^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}).
\end{aligned}$$

Exemple 2 Calculer l'aire d'une boucle de la lemniscale $r^2 = a^2\sin 2\theta$ avec $a > 0$.

La figure ci-dessous montre la région de la lemniscale donnée par $r = 0$ jusqu'à la frontière $r^2 = a^2\sin 2\theta$ où $0 \le \theta\frac{\pi}{2}$. Avec $f(r,\theta)$, le théorème 4 donne

$$\begin{aligned}
A &= \iint_R \mathrm{d}A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt{\sin\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{2}r^2]_0^{a\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{4}a^2[\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}a^2(-1-1) = \frac{1}{2}a^2.
\end{aligned}$$

5 Autres repères : théorèmes de changement de variables

En dimension un le changement de variable $x = x(u)$ où $\mathrm{d}x = x'(u)\mathrm{d}u$ fait intervenir la dérivée x'. En dimension 2 il n'est donc pas surprenant que les dérivées partielles jouent un rôle et doivent rendre compte du changement d'echelle. La quantité qui traduit ce changement d'echelle est le déterminant du jacobien J.

Théorème 4

Par le changement de variables $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$, on fait correspondre au domaine D du plan (x, y) le domaine R du plan (u, v) ; J étant le jacobien de la transformation, on a alors

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R f(x(u,v), y(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

avec $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Exemple 1 Calculer

$$\iint_R e^{(x-y)/(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où R est la région trapézoïdale du plan $x0y$ de sommets (0, 1), (0, 2), (2, 0) et (1, 0).

Les facteurs $x - y$ et $x + y$ dans l'exposant e suggèrent la subtitution suivante

$$u = x - y, \quad v = y + x.$$

La figure (1) montre la région R trapézoïdale du plan $x0y$ dont les côtés appartiennent aux droites

$$x = 0, \quad x + y = 2, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

Par subtitution de $x = \frac{1}{2}(-u + v)$ et $y = \frac{1}{2}(u + v)$, les courbes correspondantes du plan $u0v$ sont respectivement

$$v = u, \quad v = 2, \quad v = -u, \quad v = 1.$$

Ces droites forment un trapèze (S) dessiné dans la figure (2). En appliquant le thm (4) relatif auxchangement de variables on obtient,

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{(x-y)/(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_S e^{u/v}\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 [ve^{u/v}]_{-v}^{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})[\frac{1}{2}v^2]_1^2 = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).
\end{aligned}$$

Exemple 2 Calculer $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où la région R est le quart d'anneau de la figure ci-dessous.

La substitution polaire

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

détermine une transformation du plan des $r\theta$ en plan $x0y$ dont le jacobien

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

L'intégrale pourrait être calculé **Exemple 2** Déterminer l'aire du cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 = 1\}$.

Selon la définition 4 l'aire A de C donnée par $A = \iint_C \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En passant des coordonnées cartésiennes (x, y) aux cordonnées polaires (r, θ) avec, $x = r\cos\theta$ et $y = \sin\theta$, $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, l'aire A devient

$$A = \iint_C \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

où le déterminant du jacobien est donné par

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

D'où

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi$$

Exemple 3 Déterminer l'aire de l'ellipse $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

Selon la définition 4 l'aire I de D est donnée par $I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En passant des coordonnées cartésiennes (x, y) au cordonnées polaires (r, θ) avec, $x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$, $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, l'aire I s'écrit

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

où le déterminant du jacobien est donné par

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ra\sin\theta \\ b\sin\theta & rb\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = abr.$$

D'où

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

6 Intégrales triples

Les intégrales triples d'une fonction de trois variables x, y et z peuvent être définies par une démarche en quatre étapes analogues à celle développée pour les fonctions de deux variables. Le cas le plus simple est celui où f est une fonction continue sur une région parallélipipédique Q de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n\}.$$

Si $\{Q_k\}$ constitue un découpage de Q, $\|d\|$ le pas de ce découpage correspondant à la longueur de la plus longue des diagonales des Q_k, le volume ΔV_k de Q_k est

$$\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

où Δx_k, Δy_k et Δz_k désignent ses dimensions.

Définition 1

Une somme de Riemann de f relative à ce découpage d est

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k$$

où (u_k, v_k, w_k) est un point arbitraire de Q_k.

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\Delta V_k.$$

à condition que la limite existe.

Il est établit si Q est une région comme celle de la figure ci-dessous

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Remarque. On peut démontrer que cet ordre n'a pas d'importance quand le domaine d'intégration Q a la forme parallélipédique décrite précèdemment.

Exemple 1 Calculer $\iiint_Q (xy^2 + yz^3)\mathrm{d}V$ où

$$Q = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Des six intégrales itérées possibles, calculons celle-ci :

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xy^2 + yz^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (xy^2 + yz^3)\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[xy^2 z + y\frac{z^4}{4}\mathrm{d}z\right]_0^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_4^3 \int_{-1}^1 (2xy^2 + 4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_3^4 \left[2(\frac{x^2}{2})y^2 + 4yx\right]_{-1}^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_3^4 \left[(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_3^4 8y\mathrm{d}y = 8\left[\frac{y^2}{2}\right]_4^3 = 28
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que Q soit la région de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q = \{(x,y,z) : (x,y) \quad \text{dans} \quad R \quad \text{et} \quad k_1(x,y) \leq z \leq k_2(x,y)\}$$

Si f est continue sur tout Q, on peut démontrer l'égalité suivante.

Théorème 1

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}A$$

Pour une région R de type R_x

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Pour une région R est de type R_y

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exemple 2 Quelles bornes d'intégration faut-il mettre pour calculer $\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V$ où Q est la région du premier octant délimité par les plans de coordonnées, le paraboloide $z = 2+x^2+\frac{1}{4}y^2$ et le cylindre $x^2+y^2 = 1$.

La région Q se trouve, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, sous le paraboloïde et au dessus du plan xOy. La région R du plan $x0y$ est délimitée par les axes et le graphique de $y = \sqrt{1-x^2}$. La figure met en évidence une colonne qui illustre la première sommation sur des éléments $\Delta z_k \Delta y_j \Delta x_i$ dans la direction de l'axe des z. Puisque cette colonne s'étend du plan $x0y$ jusqu'au paraboloïde, la borne inférieure en la variable z est $z = 0$ et la borne supérieure $z = 2+x^2+\frac{1}{4}y^2$. Les deux intégrations suivantes portes sur la région R du plan $x0y$. Les bornes d'intégrations sont donc

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Dans le cas particulier où $f(x,y,z) = 1$ sur la région Q, l'intégrale triple devient $\iiint_Q \mathrm{d}V$ et sa valeur n'est autre que le volume de Q. Ainsi le volume de V de la région Q de l'exemple 2, telle qu'il apparaît dans la figure précédente, est donné par

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Remarque. Ce volume peut être calculé par une intégrale double mais le calculer par une intégrale triple nous a permis de manipuler des limites de triples sommes en vue d'être capable plus tard de résoudre de cette manière des problèmes qui eux ne peuvent pas être résolus autrement.

Exemple 3 Calculer le volume du solide borné par le cylindre $y = x^2$ et par les plans $y+z = 4$ et $z = 0$.

Ce solide est présenté dans la figure ci-dessous. La colonne illustre la première sommation parallèle à l'axe des z de $z = 0$ à $z = 4-y$. La figure montre aussi la région R du plan $x0y$ ainsi qu'un rectangle témoin de la première des deux intégrations sur R par rapport à y. Le théorème 1 avec $f(x,y,z) = 1$ mène aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \left[z]_0^{4-y} \right] \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (4-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 [4y - \frac{1}{2}y^2]_{x^2}^4 \mathrm{d}x \\
= &= \int_{-2}^2 (8-4x^2+\frac{1}{2}x^4)\mathrm{d}x = \left[8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \right]_{-2}^2 \\
&= \frac{256}{15}
\end{aligned}$$

Dans l'ordre dxdy pour l'intégrale double, le rectangle de la figure aurait été horizontal et la formule de V

$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Quand la première intégration de l'intégrale itérée qui calcule une intégrale triple est en y, c'est que le domaine d'intégration

$$Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq z \leq h_2(x),\ k_1(x, z) \leq y \leq k_2(x, z)\}$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et k_1 et k_2 des fonctions qui ont des dérivées partielles premières continues sur la région R du plan xOz. Le domaine d'intégration Q est donc compris entre les graphiques de $y = k_1(x, z)$ et $y = k_2(x, z)$. La projection R de Q sur le plan $x0z$ est une région du type R_x.

Théorème 2

$$\boxed{\iiint_Q f(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.}$$

Exemple 4 Calculer le volume de la région Q délimitée par les graphiques de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ et $z + y = 6$.

La région Q, représentée dans la figure ci-dessous est borné inférieurement par par le cylindre $z = 4 - x^2$ ett supérieurement par le cylindre $z = 3x^2$, et terminé à gauche par le plan $x0z$ et à droite par le plan $z + y = 6$. La région R du plan $x0z$ est présenté dans l'autre figure. Le théorème donne

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q \mathrm{d}V = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} [y]_0^{6-z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} (6 - z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[6z - \frac{1}{2}z^2\right]_{3x^2}^{4-x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 (16 - 20x^2 + 4x^4)\mathrm{d}x = \frac{304}{15}. \end{aligned}$$

Remarque. Un autre ordre dans l'intégrale double inférieure aurait mené à la somme de plusieurs intégrales triples. (Voyez-vous pourquoi ?)

Enfin, si Q est une région comme celle de la figure qui suit où les fonctions p_1 et p_2 ont des dérivées partielles premières continures sur une région convenable de R du plan des yz, alors

$$\iiint_Q f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iint_R \left[\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}A.$$

Dans l'intégrale itérée finale, dA sera remplaçé par dydz ou dzdy.

Exemple 5 À l'exemple 3, nous avons calculé le volume du solide borné par le cylindre $y = x^2$ et les plans $y + z = 4$ et $z = 0$. Etablir pour ce même volume une intégrale triple itérée dont la première intégration soit par rapport à x.

Le solide est à nouveau présenté dans la figure ci-dessous. Une première intégration par rapport à x correspond à l'empillement des éléments de volumes en une colonne parallèle à l'axe des x,

depuis le graphique de $x = -\sqrt{x}$ jusqu'à celui de $x = \sqrt{x}$. Le solide Q se projette dans le plan yOz suivant un triangle formé par les axes et la droite $y + z = 4$ (voir la deuxième fig).
Si la deuxième intégration est par rapport à y comme le laisse penser la colonne horizontale de la première figure, alors

$$V = \int_0^4 \int_O^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Sinon, la deuxième intégration ne peut être que par rapport à z et dans ce cas

$$V = \int_0^4 \int_O^{4-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$