Une équation différentielle est une équation liant une fonction et ou ses dérivées. Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

1 EDO linéaire du premier ordre

Définition 1
Elles sont de la forme
$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$
où a, b et c sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ telle que la fonction a ne s'annule pas sur J.

Théorème 1
Toute solution $y(x)$ de cette EDO est de forme
$$y_H(x) + y_P(x)$$
où
- y_H est la solution générale de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)by'(x) + b(x)y(x) = 0$.
- y_P est une solution partciculière de de l'EDO $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$.

On est donc conduit à deux problèmes : rechercher d'abord la solution générale de l'équation homogène et ensuite une solution particulière de l'équation complète.

1.1 Résolution de l'équation homogène associée

C'est une équation à variables séparable :
- *Recherche des solutions constantes.* Si $y(x) = A$ pour tout x alors $y'(x) = 0$ pour tout x et l'EDO devient $b(x)A = 0$ pour tout x. Par conséquent $A = 0$: la fonction $y(x) = 0$ pour tout x est l'unique solution constante de l'EDO homogène associée.
- *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $y(x) = 0$ pour tout x étant solution, tout autre solution $x \mapsto y(x)$ sera donc non nulle. On peut alors diviser l'EDO homogène par y et, étant donné que $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, écrire l'équation sous la forme
$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x \Longrightarrow \log|y| - \int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x.$$
Ainsi, tout solution non nulle de l'équation homogène est de la forme
$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} \quad A(x) = -\int \frac{b(u)}{a(u)}\mathrm{d}u$$
avec C constante arbitraire non nulle.

1.2 Recherche d'une solution particulière (méthode de Lagrange ou de varaiation de la constante

Elle consiste, à partir de la solution de l'équation homogène $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ à considérer alors C comme une fonction de x et à rechercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$. Ecrire alors que y_P est solution de notre EDO. On calcule alors $y'_P(x)$ et on reporte $y'_P(x)$ et $y_P(x)$ dans notre EDO. On observe que $C(x)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification. Il ne reste que $C'(x)$, comme le but est de chercher une solution particulière, on choisit une primitive particulière $C(x)$ et donc $y_P(x)$.

2 EDO linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 1
une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$$

où $a \neq 0$, b et c sont des constantes données et g une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 1
Toute solution y d'une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants dépend de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 et est de forme $y_H(x) + y_P(x)$ où y_P est une solution partciculière de de l'EDO et y_H est la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$).

2.1 Résolution de l'équation homogène associée

Théorème 2
On introduit le polynôme caractéristique $P(r) = ar^2 + br + c$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors

- si $\Delta > 0$ on a
$$y_H(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};$$
- si $\Delta = 0$ on a
$$y_H(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad r = \frac{-b}{2a};$$
- si $\Delta < 0$ on a
$$y_H(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta.$$

2.2 Recherche d'une solution particulière

Théorème 3
Si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors

$$y_P(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}\cos(\theta x) + q_{2,n}\sin(\theta x))$$

où p_n, $q_{1,n}$ et $q_{2,n}$ des polynômes de degré n et on a
- si $\Delta > 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = r_1$ ou $\mu = r_2$ alors $m = 1$.
- si $\Delta = 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = r$ alors $m = 2$.
- si $\Delta < 0$ et $\theta = \beta$ et $\mu = \alpha$ alors $m = 1$.
- sinon $m = 0$.

Exemple 8
Soit m un paramètre qui dépend du polynôme caractéristique.
- Si $g(x) = \cos(5x)$ ou $g(x) = \sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 0$, et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(A\cos(5x) + B\sin(5x))$.
- Si $g(x) = e^{2x}\sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 2$, et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{2x}(A\cos(5x) + B\sin(5x))$.
- Si $g(x) = x\cos(5x)$ ou $g(x) = x\sin(5x)$ alors $n = 1$, $\mu = 0$, et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m((Ax + B)\cos(5x) + (Cx + D)\sin(5x))$.
- Si $g(x) = x$ alors $n = 1$, $\mu = 0$, et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(Ax+B)$.
- Si $g(x) = xe^{3x}$ alors $n = 1$, $\mu = 3$, et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{3x}(Ax + B)$.
- Si $g(x) = e^{2x}$ alors $n = 0$, $\mu = 2$, et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = Ax^m e^{2x}$.