Université Mouloud Mammeri
Faculté du Génie de la construction
Dpt de Génie Civil

Maths 3 (Section A & B) 2019/2020

Transformation de Laplace [*]

La transformation de Laplace permet de remplacer une équation différentielle dans le domaine temporelle par une équation polynomiale dans le domaine symbolique.

La recherche de la solution de l'équation différentielle se limite alors ; à partir des racines du polynôme, à la recherche dans une table de la forme type de solution.

1 Fonctions causales

Définition 1

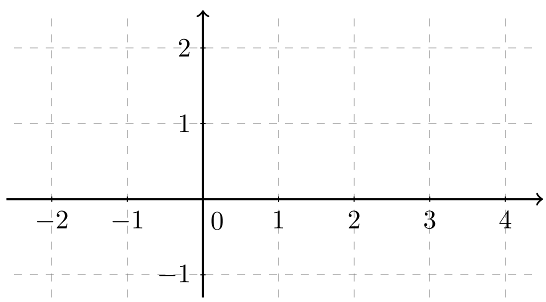
Une fonction f (ou un signal) de la variable réelle t est dite causale si

$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0.$$

1.1 Fonction échelon unité ou fonction de Heaviside [†]

Cette fonction notée $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

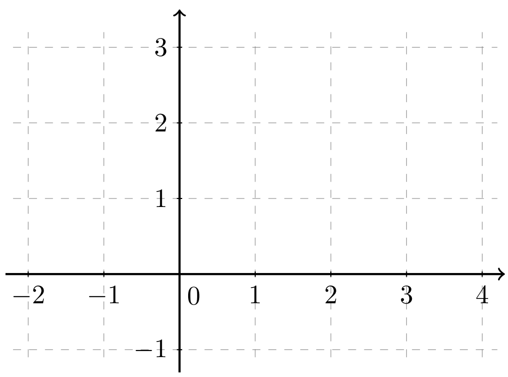


Remarque. Pour toute fonction f, la fonction f définie par $f(t) = g(t)\mathcal{U}(t)$ est causale.

1.2 Fonction rampe unité

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



qui s'écrit encore sous la forme $f(t) = t \times f(t)$.

[*]. Pierre Simon Laplace (23 mars 1749-5 mars 1827) est un mathématicien, astronome et physicien français.

[†]. Olivier Heaviside (18 mai 1850- 3 février 1925) est un physicien britanique autodidacte. Il a formulé et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.

1.3 Fonction retardée/avancée

Définition 1

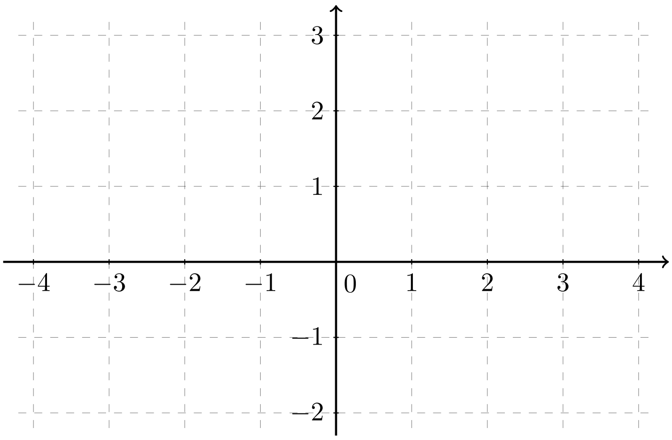
Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$.
(i) Si g est la fonction définie par $g(x) = f(x - a)$, $a > 0$, on dit que g est la fonction f retardée de a.
(ii) Si g est la fonction définie par $g(x) = f(x + a)$, $a > 0$, on dit que g est la fonction f avancée de a.

Propriété

Dans le plan rapporté à un plan à un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, la courbe représentative de la fonction g se déduit de celle de f par une translation du vecteur $a\overrightarrow{u}$, tandis que la courbe représentative de la fonction g se déduit de celle de f par une translation du vecteur $-a\overrightarrow{u}$.

Exemple 1. Représenter graphiquement les fonctions

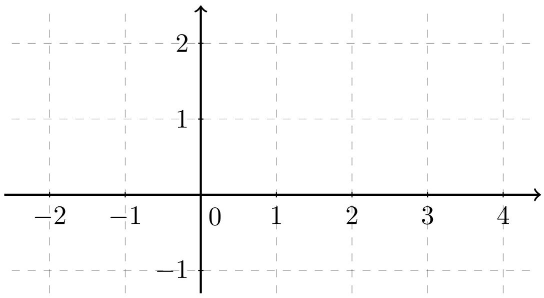
$g : t \to \sin(t)\mathcal{U}(t)$
$h : t \to \sin(t - \pi)\mathcal{U}(t - \pi)$



1.4 fonction créneau

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et k un nombre réel. La fonction créneau est définie sur $\mathbb{R}$ par

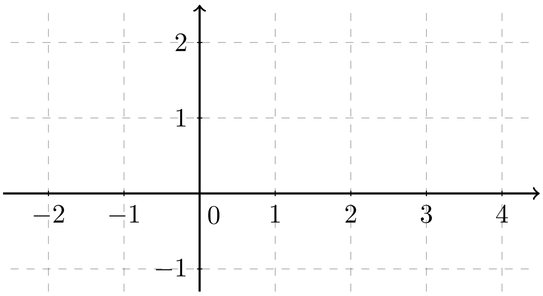
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ t & \text{si} \quad a \leq t < b \\ 0 & \text{si} \quad t \geq b \end{cases}$$



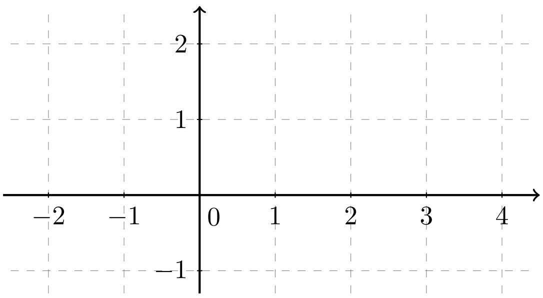
Remarque. Cette fonction peut s'écrire sous la forme $f(t) = k[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)]$.

Exemple 4 Définir la fonction f représentée graphiquement en utilisant la fonction échelon unité $\mathcal{U}$.

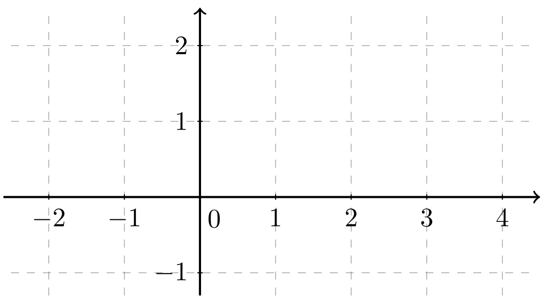
Donner l'expression de f "par morceaux", sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$, et la représenter graphiquement.



$$f(t) = 3\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-3)\mathcal{U}(t-3).$$



$$f(t) = 3\mathcal{U}(t) - \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)\mathcal{U}(t-1) + (\frac{1}{2}t + \frac{1}{2})\mathcal{U}(t-3).$$



$$f(t) = \mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) + 2(t-2)\mathcal{U}(t-2) - (t-3)\mathcal{U}(t-3).$$

Solution Une telle fonction peut aussi s'écrire

2 Transformation de Laplace

2.1 Définition

La transformée de Laplace d'une fonction f est la fonction $F = \mathcal{L}(f)$ de la variable réelle complexe p définie par

$$F(p) = (\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

Remarques

1. Pour que F existe, il faut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$

2. Par abus d'écriture et pour simplifier les notations, on la note souvent $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $\mathcal{L}[f](p)$

Exemple 1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions

1. $f(t) = \mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = t\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{-at}$, pour p tel que $\mathcal{R}e(p) > -\mathcal{R}e(a)$
4. $f(t) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega > 0$

2.2 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

a) **Transformée de Laplace de la fonction unité** $(t \mapsto \mathcal{U}(t))$
La transformée de Laplace de l'échelon unité est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}[\mathcal{U}(p)] = \frac{1}{p}$$

b) **Transformée de Laplace de la fonction rampe** $(t \mapsto t \times \mathcal{U}(t))$
La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p^2}$$

c) **Transformée de Laplace de la fonction** $(t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t), n \in \mathbb{N})$
La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t), n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t^n \times \mathcal{U}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

d) **Transformée de Laplace de la fonction** $(t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t), a \in \mathbb{C})$
La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t)$ est définie pour $\mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(a)$ et on a

$$\mathcal{L}[e^{at} \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p-a}$$

Exemple 4 Définir la fonction f représentée graphiquement en utilisant la fonction échelon unité.
Donner l'expression de f "par morceaux", sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$, et la représenter graphiquement.

Solution Une telle fonction peut aussi s'écrire

3 Transformation de Laplace

3.1 Définition

La transformée de Laplace d'une fonction f est la fonction $F = \mathcal{L}(f)$ de la variable réelle complexe p définie par

$$F(p) = (\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

Remarques

1. Pour que F existe, il faut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$
2. Par abus d'écriture et pour simplifier les notations, on la note souvent $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $\mathcal{L}[f](p)$

Exemple 1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions

1. $f(t) = \mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = t\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{-at},$ pour p tel que $\mathcal{R}e(p) > -\mathcal{R}e(a)$
4. $f(t) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega > 0$

3.2 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

a) **Transformée de Laplace de la fonction unité** $(t \mapsto \mathcal{U}(t))$
La transformée de Laplace de l'échelon unité est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}[\mathcal{U}(p)] = \frac{1}{p}$$

b) **Transformée de Laplace de la fonction rampe** $(t \mapsto t \times \mathcal{U}(t))$
La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p^2}$$

c) **Transformée de Laplace de la fonction** $(t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t), n \in \mathbb{N})$
La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t), n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t^n \times \mathcal{U}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

d) **Transformée de Laplace de la fonction** $(t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t), a \in \mathbb{C})$
La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t)$ est définie pour $\mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(a)$ et on a

$$\mathcal{L}[e^{at} \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p-a}$$

4 Propriété de la transformation de Laplace

4.1 Linéarité

Soit f et g deux fonctions causales admettant des transformées de Laplaces.
– Alors la fonction $f + g$ admet une transformée de Laplace et

$$\mathcal{L}[f+g](p) = \mathcal{L}[f](p) + \mathcal{L}[g](p)$$

– Quelque soit k appartenant $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[k \times f](p) = k \times \mathcal{L}[f](p)$$

Exemple. Donner la transformée de Laplace de la fonction défine par $f(t)(3t + 4) \times \mathcal{U}(t)$.

4.2 Théeorème du retard

Théorème

Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]$, alors $\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p)$.

Exemple. Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$.

4.3 Effet d'un changement d'échelle sur la variable

Théorème

Soit $\alpha > 0$. Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]$, alors $\mathcal{L}[f(\alpha t)\mathcal{U}(\alpha t)] = \dfrac{1}{\alpha}F(\dfrac{p}{\alpha})$.

Remarque. Pour $\alpha > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{U}(\alpha t) = \mathcal{U}(t)]$.

Exemple. Soit f tel que $\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]\dfrac{p}{p^3+1}$. Déterminer $\mathcal{L}[2f(t)\mathcal{U}(t)]$.

4.4 Effet de la multiplication par e^{-ta}

Théorème

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}(p) > -\mathcal{R}(a)$.

$$\text{Si } \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)],\ \text{alors}\mathcal{L}[f(t)e^{-at}\mathcal{U}(t)] = F(a+p).$$

Exemple. Montrer que les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto \cos(\omega t)$ et $t \mapsto \sin(\omega t)$ sont

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Exemple 2. Soit f telle que $f(t) = \sin(t)e^{-t}\mathcal{U}(t)$.

5 Transformée d'une dérivée

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0,+\infty[$, dont la dérivée f' est continue sur $]0,+\infty[$.

$$\mathcal{L}[f'(t)\mathcal{U}(t)] = pF(p) - f(0^+)$$

Théorème 2

Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace F.
Si f' est continue sur $]0, +\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0, +\infty[$, et si f'' est continue sur $]0, +\infty[$ alors

$$\mathcal{L}[f''(t)\mathcal{U}(t)] = p^2 F(p) - pf(0^+) - f(0^+).$$

Exemple. Exprimer la transformée de Laplace de la dérivée troisième de f, $\mathcal{L}[f'''(t)\mathcal{U}(t)]$.

5.1 Transformée d'une intégrale

Théorème 1

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\mathcal{U}(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{p}F(p).$$

5.2 Dérivée d'une transformée de Laplace

Théorème 1

Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace F.

$$F'(p) = \mathcal{L}[-t\mathcal{U}(t)].$$

Exemple. Donner la transformée de Laplace de la fonction f définie par $f(t) = t \times \sin(t)\mathcal{U}(t)]$.

5.3 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Théorème 1

Soit $F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]$.
Si les fonctions considérées ont des limites dans les conditions indiquées, on a :

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{p\to+\infty} pF(p) & = & \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) & \text{théorème de la valeur initiale} \\ \lim\limits_{p\to 0^+} pF(p) & = & \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) & \text{théorème de la valeur finale} \end{array}$$

5.4 Calculs de Transformées de Laplace

Exemple 1. Calculer les transformées de laplace des fonctions suivantes ;
1. $f(t) = (t^3 - 3t + 1)\mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = (3\sin t - 2\cos(3t))\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{(3t+2}\mathcal{U}(t)$

Exemple 2. On considére les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sin(2t) - \mathcal{U}(t) \quad f(t) = \cos t\mathcal{U}(t) \quad h(t) = \sin(2t)\cos t\mathcal{U}(t) = f(t) \times g(t)$$

On note F, G et H leurs transformées de Laplace respectives.
1. Calculer $F(p)$ et $G(p)$.
2. Linéariser $\sin(2t)\cos t$. En déduire $H(p)$.
3. A-t-on $H = F \times G$?

Exemple 3. En faisant apparaître le terme $t-1$, calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^2\mathcal{U}(t-1)$.

Exemple 4. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
1. $f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t-2)$
2. $f(t) = (t^2-t+1)\mathcal{U}(t-1)$
3. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$

Exemple 5. Soit la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{k}{\tau}\mathcal{U}(t) - \frac{k}{\tau}(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau) \quad \text{avec } \tau \text{et } k \text{ deux réels} > 0.$$

1. Représenter la fonction $f/$
2. Prouver que $F(p) = \dfrac{k}{\tau p^2}(1-e^{-\tau p}$.
3. Calculer $\lim_{t\to 0^+} pF(p)$.
4. Vérifier sur cet exemple le théorème de la valeur finale.

Exemple 5. Définir les fonctions représentées graphiquement à l'aide de l'échelon unité et calculer leurs transformées de Laplace.

6 Original d'une fonction

Définition 1

Soit $F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]$, on dit que f est l'original de F. On note aussi $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(t)]$.

Théorème 1

L'original, s'il existe, est unique.

6.1 Linéarité

a)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)+G(p)] = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] + \mathcal{L}^{-1}[G(p)]$$

b)

$$\mathcal{L}^{-1}[kF(p)] = k\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

Exemple 1 Donner l'original des fonctions suivantes
1. $F(p) = \dfrac{1}{p^2}$ 2.$F(p) = \dfrac{3}{p+4}$ 3.$F(p) = \dfrac{3}{p^2+4}$ 4.$F(p) = \dfrac{3}{(p+4)^2}$
4. $F(p) = \dfrac{3}{p^2-4}$ 5.$F(p) = \dfrac{3p}{(p+4)^2}$ 6.$F(p) = \dfrac{3p}{p^2-4}$ 7.$F(p) = \dfrac{1}{(p^2(p+1)}$
(Décomposer $F(p)$ en éléments simples, *i.e.* $F(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p^2} + \dfrac{\gamma}{p+1}$)

9.$F(p) = \dfrac{3e^{-2p}}{p+4}$ 10.$F(p) = \dfrac{1+e^{-p}}{p^3}$.

Exemple 2 Calculer l'original des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{1+3e^{-2p}}{p^2+2p+2}$ 2.$F(p) = \dfrac{p^3+2p+1}{p^2(p^2+2)}$ 3.$F(p) = \dfrac{1}{2p^2+p-1}$ 4.$F(p) = \dfrac{1}{(4p^2+16p+17}$

7 Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de remplace des problèmes de dérivation et d'intégration par des problèmes algébriques. Elle permet ainsi entre autre de transformer des équations différentielles, ou systèmes différentielles, en équations, ou systémes d'équations, algébriques.

7.1 Résolution d'équations différentielles

Soit l'équation différentielle

$$s'^{(t)} + s(t) = e(t)$$

avec la condition initiale $s(0^+) =^0$ où s est une fonction causale, continue sur $]0, +\infty[$, dérivable par morceaux et où e est la fonction définie par $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

On admet que la fonction recherchée s et sa dérivée admettent des transformées de Laplace, et on note S la transformée de Laplace de s et E celle de e.

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on obtient :

$$\mathcal{L}[s'^{(t)} + s(t)] = \mathcal{L}[e(t)]$$

soit,

$$pS(p) - s(0^+) + S(p) = E(p)$$

soit encore

$$S(p) = \frac{1}{p=1}E(p).$$

Il reste alors à calculer la transformée de Laplace $E(p)$:

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p} = \frac{1}{p}(1-e^{-p}).$$

On a donc,

$$S(p) = \frac{1}{p+1}E(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1}(1-e^{-p})$$

or, en décomposant en éléments simples l'original s de S :

$$\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] = \mathcal{U}(t) - e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$$

et, d'après le théorème du retard :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}e^{-t}\right] = \mathcal{U}(t) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1).$$

On en déduit donc la solution s,

$$s(t) = \mathcal{U}(t) - e^{-t}\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1)e^{-(t-1)}$$

ou encore, sans utiliser l'échelon unité $\mathcal{U}$:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \text{si}\, t < 0 \\
s(t) &= s_1(t) = 1 - e^{-t}\text{si}\, 0 \leq t < 1 \\
s(t) &= s_2(t) = (e-1)e^{-t}\text{si } \geq t < 1
\end{aligned}
$$

Exemple 1 On considère l'équation différentielle :

$$s'^{(t)} + s(t) = e(t),$$

avec la condition initiale $s(0^+) = 0$, où s est une fonction causale, continue sur $]0, +\infty[$, dérivable par morceaux, et où e est la fonction définie par $e(t) = 2\mathcal{U} - \mathcal{U}(t-2)$.

On admet que s et sa dérivée ont des transformées de Laplaces, et on note S la transformée de Laplace de s et E celle de e.

1. Représenter la fonction e.
2. Prouver que $S(p) = 2F(p) - F(p)e^{-2p}$, avec $F(p) = \dfrac{1}{p - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{p}$.
3. Calculer l'original de F.
4. En déduire la solution de l'équation différentielle.
5. Exprimer s sans utiliser l'échelon unité.

Exemple 2 On considère l'équation différentielle :

$$s''^{(t)} - 2s'(t) + s(t) = e(t),$$

avec la condition initiale $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$ et $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

1. Représenter la fonction e.
2. Prouver que $S(p) = F(p) - F(p)e^{-p}$, avec $F(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{(p-1)^2}$.
3. Calculer l'original de F.
4. En déduire la solution de l'équation différentielle.
5. Exprimer s sans utiliser l'échelon unité.

7.2 Résolution de systèmes différentielles

Exemple 1 Résoudre le sytème d'équations différentielles :

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\
y'(t) &= x(t) + 2y(t)
\end{aligned}
$$

avec les conditions initiales

$$
\begin{aligned}
x'(0^+) &= 1 \\
y'(0^+) &= 0
\end{aligned}
$$

où x et y sont des fonctions causales de la variable réelle t, continues sur $]0, +\infty[$, dérivables par morceaux. On admet que x, y, x' et y' admettent des transformées de Laplace.

Exemple 3 En utilisant le transformation de Laplace, résoudre le système différentiel suivant :

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x + y \\
y' &= x + 2y
\end{aligned}
$$

avec les conditions initiales

$$
\begin{aligned}
x'(0^+) &= 0 \\
y'(0^+) &= 1,
\end{aligned}
$$

où x et y sont des fonctions causales de la variable t, continues sur $]0, +\infty[$, dérivables par morceaux. On admet de plus que x, y et leurs dérivées ont des transformées de Laplace.

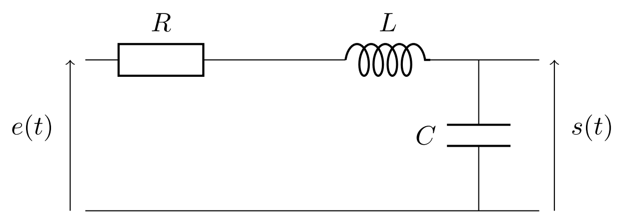
Définition 1

On dit que le système est linéaire d'ordre 2 si e et s vérifie une équation différentielle du type

$$a_2 s'' + a_1 s' + a_0 s = b_2 s'' + b_1 s' + b_0 s,$$

où $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sont des nombres réels.

Exemple Circuit RLC



où $e(t)$ et $s(t)$ sont les tensions d'entrée sortie du circuit, reliées par l'équation différentielle

$$LCs'' + RCs' + s = 0.$$

Il s'agit donc bien d'un exemple de sytème linéaire.

Définition 1

On dit qu'un système est initialement au repos lorsque les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} s(0^+) = s'(0^+) &= 0 \\ s(0^+) = s'(0^+) &= 0 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, en appliquant la transformée de Laplace, l'équation différentielle devient

$$a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_2 p^2 E(p) + b_1 p E(p) + b_0 E(p),$$

et on déduit

Propriété

Pour un système initialement au repos, on a $S(p) = H(p) \times E(p)$, avec la fonction de transfert du système

$$H(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Théorème de stabilité d'un système

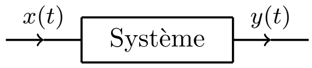
Un système linéaire est stable si, aund $e(t) = \delta(t)$, on a $s(t) = 0$.
En d'autres termes, le système est stable si en le soumettant à une impulsion, il finit par retrouver son état au repos.

Si $e(t) = \delta(t)$, alors $E(p) = 1$, et donc, $S(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$. Le système linéaire est stable si, et seulement si, toutes les racines de $D(p)$ (qu'on appelle pôles) ont leurs parties réelles négatives.

Exemple 1 Le circuit RLC précédent est-il stable ?

Exemple 2 La fonction de transfert d'un sytème H est définie par

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 2}$$



On considère le signal d'entrée x défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ x(t) = 5 \sin t & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Le signal de sortie y du système soumis au signal d'entrée x est tel que :

$$Y(p) = H(p) \times X(p)$$

où X et Y sont les transformées de Laplace respectives des fonctions numériques x et y :

$$X(p) = \mathcal{L}[x(t)] \quad \text{et} \quad Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$$

On se prpose de déterminer le signal de sortie de y.

1. Déterminer $X(p)$ et $Y(p)$.
2. Déterminer les réels a, b, c, et d tels que, pour tout réel p, on ait :

$$\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p+1)} = \frac{ap+b}{p^2+1} + \frac{cp+d}{(p+1)^2+1}$$

3. a) Calculer les originaux respectifs de :

$$\frac{p}{p^2+1}, \ \frac{1}{p^2+1}, \ \frac{p+1}{(p+1)^2+1}, \ \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

4. b) En déduire l'expression de $y(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

Exemple 2 *Partie A*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$. 1. Le but de cette question est l'étude des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

a. Calculer $f'(t)$, puis vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0, \pi]$, $f'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

d. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ pour t variant dans l'intervalle $[0, \pi]$. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

e. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$. (On pourra utiliser une double intégration par parties, ou utiliser les formules d'Euler).

2. On définit la fonction g par

$$g(t) = f(t)\mathcal{U}(t)f(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi), \quad \mathcal{U} \quad \text{est l'échelon unité.}$$

a. Expliciter $g(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[]$.

b. On admet que les fonctions $t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto g(t)$ possèdent les transformées de Laplace F et G. Calculer les transformées de Laplace suivantes ;

$$\mathcal{L}\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathcal{U}(t)\right] \quad \text{puis}\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right] \quad \text{et enfin}\mathcal{L}\left[f(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)\right].$$

Enfin en déduire la transformée de Laplace G de la fonction g.

Partie B

Soit un système "entrée-sortie" représenté par le schéma

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\text{Système}} \xrightarrow{y(t)}$$

où e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, nuls pour t négatif et admettant des transformées de Laplace notées F et S.

La fonction de transfert du système est définie par :$S(p) = H(p = \times E(p)$.

Dans cet exercice la fonction de transfert H est donnée par : $H(p) = \dfrac{p}{2p+2+2p+1}$ et la fonction e est un "créneau" défini par : $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\pi)$.

1. Déterminer la transformée de Laplace E de la fonction e.

2. Vérifier que : $2p2 + 2p + 1 = 2\left[\left(p + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{4}\right]$ et calculer $S(p)$. En déduire l'expression de $s(t)$. (On pourra pour cela utiliser les résultas de la partie A.).