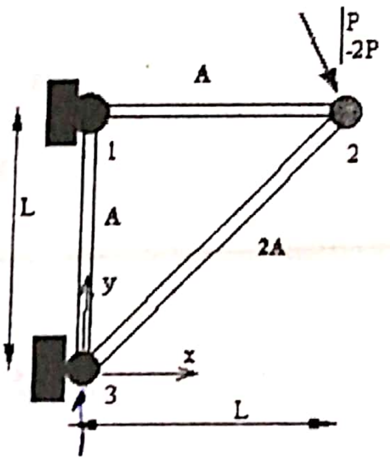
Calcul statique d'un treillis plan à nœuds articulés par la méthode des éléments finis

Présentation :

Les hypothèses sont les suivantes :

- { x , y } est le plan qui contient la structure.
- Toutes les poutres sont articulées entre elles.
- Les charges de composantes (F_x , F_y) sont nodales.

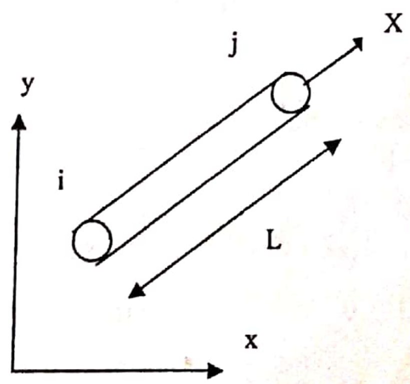
La force intérieure dans les poutres se réduit donc à l'effort normal N.



Rappels

Soit (i-j) un élément de treillis plan à nœuds articulés et soit $\{x, y\}$ le plan de la structure.
La matrice de rigidité de l 'élément est égale à :

$$[K]^e = \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$



où :

- E est le module d'Young du matériau.
- A est l'aire de la section supposée constante.
- L est la longueur de la poutre.
- C = cosθ, s = sin θ (θ est l'angle de l'axe local X de l'élément par rapport à l'axe global x).

Soit $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$ le vecteur déplacement élémentaire.

L'effort normal dans l'élément est égal à :

$$N = \frac{ES}{L}\left[c(u_j - u_i) + s(v_j - v_i)\right]$$

Exemple 1

Enoncé :
Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure est composé de trois poutres. Soit E le module d'Young du matériau.

L'aire des sections droites est égale à :
- poutres (3-1) et (1-2) : S
- poutre (3-2) : 2S

Le nœud 1 est lié à l'extérieur par une rotule et le nœud 3 repose sur un appui simple.

Le nœud 2 porte une charge (P, -2P, 0) avec P > 0.
1. Calculer les déplacements des nœuds.
2. Calculer les actions de liaison.
3. Calculer les efforts normaux dans les poutres.

Résolution

I. Etude élémentaire

Les caractéristiques des trois éléments sont :
- élément (1-2) : [L, S, E, c=1, s=0] ($c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, θ étant l'angle que fait la barre avec l'axe des x) ;
- élément (3-1) : [L, S, E, c=0, s=1] ($c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$) ;
- élément (3-2) : [$L\sqrt{2}$, 2S, E, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$] ($c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$) ;

On en déduit les matrices de rigidité élémentaires :

$$[k_{1-2}] = \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-1}] = \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [k_{1-2}] = \frac{ES}{L\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

II – Etude globale : assemblage

L'assemblage conduit à la relation efforts-déplacements globale :

$$\begin{bmatrix} F_{1x}=? \\ F_{1y}=? \\ F_{2x}=P \\ F_{2y}=-2P \\ F_{3x}=? \\ F_{3y}=0 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2=? \\ v_2=? \\ u_3=0 \\ v_3=? \end{bmatrix}$$

Compte tenu des conditions aux limites, cette équation se réduit à :

$$\begin{bmatrix} F_{1x}=? \\ F_{1y}=? \\ F_{2x}=P \\ F_{2y}=-2P \\ F_{3x}=? \\ F_{3y}=0 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

III – Résolution

1 – Calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} P \\ -2P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{3PL}{ES} \;;\; v_2 = \frac{PL}{ES}(2\sqrt{2}+5) \;;\; v_3 = \frac{2PL}{ES}.$$

2 – Calcul des actions de liaison

On en déduit les actions de liaison :

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où :}$$

$$F_{1x} = -3P \;,\; F_{1y} = 2P \;;\; F_{3x} = 2P.$$

3 – Vérification

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0.$$

IV – Efforts normaux dans les éléments

- élément (1-2) :

$$N_{1-2} = \frac{ES}{L}(1(u_2 - u_1) + 0(v_2 - v_1)) = 3P > 0$$

- élément (3-1) :

$$N_{3-1} = \frac{ES}{L}(0(u_1 - u_3) + 1(v_1 - v_3)) = 2P > 0$$

- élément (3-2) :

$$N_{3-2} = \frac{2ES}{L\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}(u_2 - u_3) + \frac{\sqrt{2}}{2}(v_2 - v_3)) = -2\sqrt{2}\,P < 0.$$