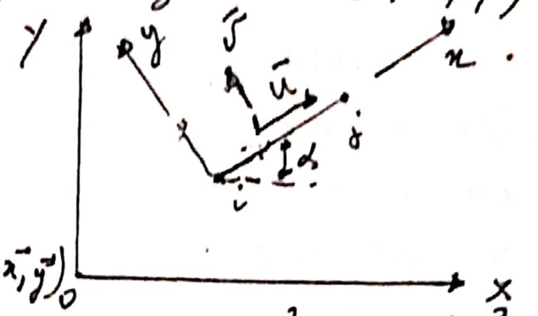
Etude de l'element barre dans le repere global $(O, \vec{X}, \vec{Y})$

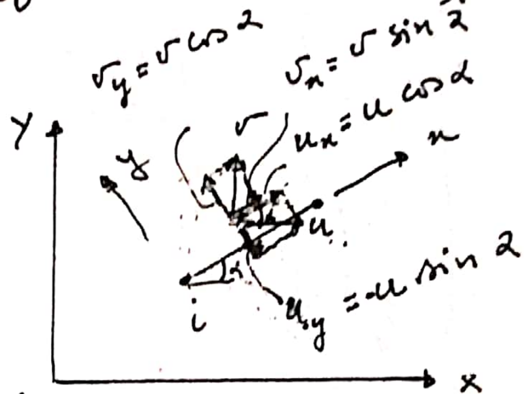
Soit un element barre de section S et de longueur l representé dans le repere global $(O, \vec{X}, \vec{Y})$

$(i, \vec{x}, \vec{y})$ repere local de l'element



$\bar{u}$: est le déplacement axial dans le repere $(i, \vec{x}, \vec{y})$

On ajoute un déplacement fictif $\perp$ $\vec{ix}$ donc on définit le champ de déplacement comme suit :



$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}$ dans le repere $(i, \vec{x}, \vec{y})$

$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ champs de deplacement dans le repere global $(O, \vec{X}, \vec{Y})$

Exprimons $\bar{u}$ et $\bar{v}$ en fonction de u et v.
(projection de u et v dans le repere local)

Par identification des deux schéma ci dessus :

$$\begin{cases} \bar{u} = u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ \bar{v} = -u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{cases} \quad \ldots \quad (1)$$

Application aux noeuds :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{u}_n\} = [T]\{u_n\} \quad \ldots (2)$$

On pose $[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$[T]$: est la matrice de passage du repère local au repère global

De même on peut exprimer les forces locales en fonction des forces globales via la matrice de passage :

$$\begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_j^x \\ f_j^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \\ F_j^x \\ F_j^y \end{Bmatrix} \Rightarrow \{f_n\} = [T]\{F_n\} \quad \ldots (3)$$

$\{f_n\}$: vecteur des forces locales de l'élément.

Rque : f_i^y et f_j^y sont des forces fictives qu'on a ajouté pour les besoin du calcul mathématique

$\{F_n\}$: vecteur des forces globales de l'élément.

L'équation d'équilibre de l'élément dans le repère local s'écrit : $\{f_n\} = [K^e]\{\bar{u}_n\} \quad \ldots (4)$

1°/ En considérant le vecteur déplacement réel d'un élément barre (déplacement axial)

$$\begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_j^x \end{Bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix}$$

2°/ En considérant le vecteur déplacement auquel on ajoute les déplacements fictifs $\bar{v}_i = 0$ et $\bar{v}_j = 0$

De même pour le vecteur force local avec $f_i^y = 0$ et $f_j^y = 0$

$$\begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_j^x \\ f_j^y \end{Bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \Rightarrow \{f_n\} = [k^e]\{\bar{u}_n\} \quad \ldots (5)$$

3°/ si on considère que $[K^e]$ est la matrice de rigidité de l'élément dans le repère global alors l'équation d'équilibre de l'élément dans ce repère s'écrit : $\{F\} = [K^e]\{u_n\}$ ... (6)

En utilisant la matrice de passage $[T]$
On remplace $\{f_n\}$ par $[T]\{F_n\}$ et $\{\bar{u}_n\}$ par $[T]\{u_n\}$ dans l'équation (5)
on obtient $\{F\} = [T]^T[k^e][T]\{u_n\}$
d'où $[K^e] = [T]^T[k^e][T]$ matrice de rigidité de l'élément dans $(O, \vec{x}, \vec{y})$
on pose $\cos\alpha = c$; $\sin\alpha = s$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

et finalement :

$$[K^e] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

on pose $[A] = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$; $[K]^e = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}$.