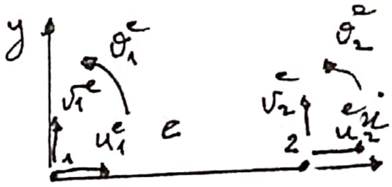
Etude d'un element poutre. (flexion + compression-traction)

L'élément possède six déplacements nodaux inconnus :

$$\{\bar{u}_n\}^e = \langle \bar{u}_1 , \bar{v}_1 ; \bar{\theta}_1 , \bar{u}_2 , \bar{v}_2 , \bar{\theta}_2 \rangle^t$$

Pour approximer le champ de déplacement $\{u\}$ de façon unique, La fonction approchée doit donc contenir six paramètres.



$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$\bar{v} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3$$

$$\bar{\theta} = \frac{dv}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2$$

Le vecteur des deplacements, s'écrit alors :

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

ou d'une manière plus compacte :

$$\{\bar{u}\} = [P(x)]\{\alpha\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Au noeuds 1 $x_1 = 0$ et au noeud 2 : $x_2 = L$

Alors

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

ou $\{u_n^e\} = [A]\{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1}\{u_n^e\} \ldots (2)$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

On remplace (2) dans (1)

$$\{\bar{u}\} = [P(x)][A]^{-1}\{u_n^e\}$$

Relation entre déplacement et déformation (Matrice de déformation $[B]$)

Nous pouvons écrire le vecteur des déformations généralisées $\{\varepsilon\}$ de la manière suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^u \\ \varepsilon_x^v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 6xy \end{bmatrix} [A]^{-1}\{u_n^e\}$$

Avec :

$$\varepsilon_x^u = \frac{du}{dx} \quad \text{déformation axiale}$$

$$\varepsilon_x^v = -y\frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{déformation due à } v$$

(due à la flexion).

On peut écrire

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n^e\}$$

donc :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 6xy \end{bmatrix} [A]^{-1}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & y\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & y\left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) & 0 & y\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) & y\left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.

$$[K_e^L] = \int_V [B]^T [D][B]\, dV$$

Le problème ici est unidimensionnel, la matrice $[D]$ n'est composée que du module d'Young E et pour que le produit matricielle donnant $[K_e^L]$

soit possible alors $[D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$

$$[K_L^e] = \int_V \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & y\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \\ 0 & y\left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & y\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \\ 0 & y\left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & y\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & y\left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) & 0 & y\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) & y\left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix} dV$$

Aprés calcul on obtient :

$$[K_L^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

<u>Matrice de rigidité de l'element dans le repère global</u> $[K_e]$

$$[K_e] = [T_e]^T [K_e^L] [T_e]$$

<u>Matrice de passage</u> :

$$[T_e] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α angle que fait le repère local avec le repere global.