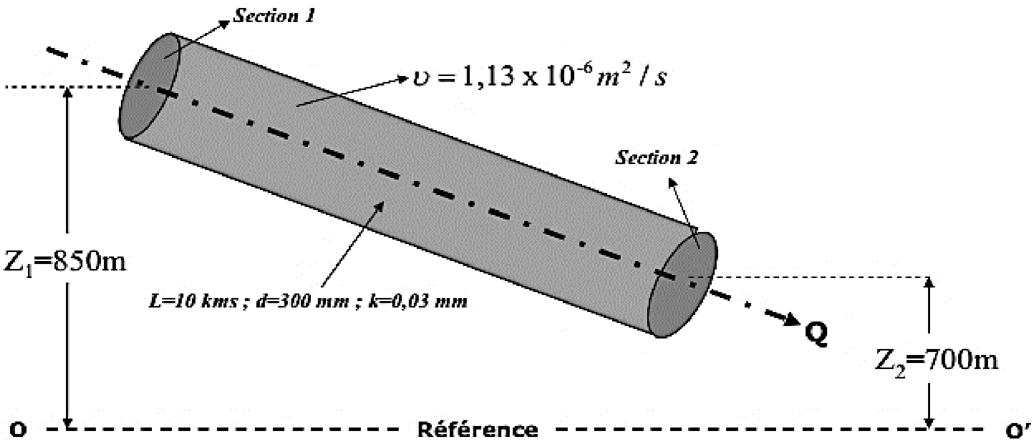
SERIE N°1

EXERCICE 1

Un débit Q s'écoule à travers une canalisation d'un diamètre 300 mm sur une longueur de 10km, d'un point 1 situé à une cote Z_1= 850m vers un point 2 à une cote Z_2 = 700m. (Figure ci-dessous)

1. Déterminer les pertes par frottements, J, entre les deux sections 1 et 2.
2. En utilisant la formule de Cole Brook White, calculer le coefficient des pertes linéairesλ.
3. Déduire la vitesse et le débit d'écoulement.



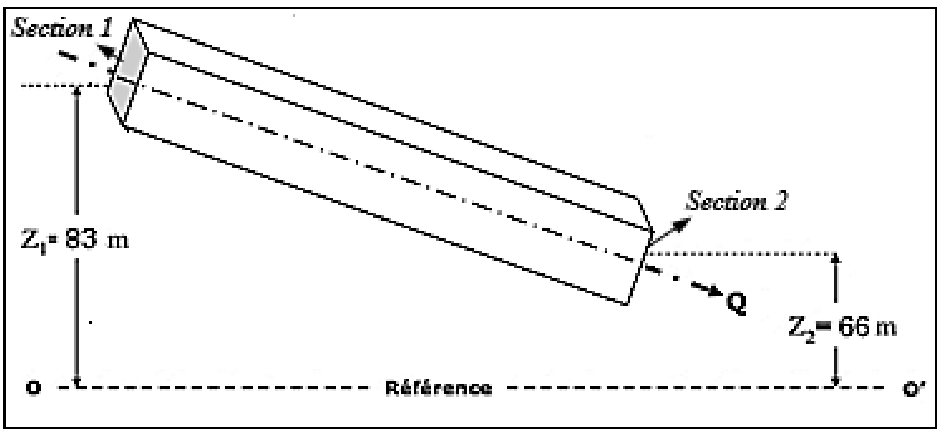
EXERCICE 2

On décharge du fluide à l'aide d'un tuyau de section rectangulaire (300 mm x 460 mm), allant d'un point 1 de cote 83m à un point 2, situé à 965 m du point 1, à une cote 66 m.

1. Donner l'expression de la vitesse d'écoulement à travers la canalisation en fonction du coefficient de frottement λ.
2. Déterminer le coefficient de frottement λ en utilisant la formule de Colebrook White.
3. Calculer le débit d'écoulement à travers la canalisation.

On donne :

- La rugosité de la conduite $\varepsilon = 0{,}5\ mm,$
- La masse volumique du fluide $\rho = 719\ kg/m^3$,
- La viscosité dynamique du fluide $\mu = 2{,}92\ .\ 10^{-4} Pa.s,$
- L'accélération de pesanteur $g = 9{,}81\ m/s^2$



SOLUTION

EXERCICE1

1. **Les pertes par frottements, *J*, entre les deux sections 1 et 2**

Entre les sections 1 et 2, le théorème de Bernoulli (théorème de l'énergie) s'écrit :

$$\frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \frac{V_1{}^2}{2g} = \frac{P_2}{\varpi} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta h_{12}$$

Entre les deux sections nous avons les caractéristiques suivantes :

- $z_1 = 850m \ et \ z_2 = 700m,$
- $P_1 = P_2 = P_{atm}$
- Le diamètre de la conduite est constant : $V_1 = V_2,$
- Toutes les pertes de charge sont linéaires (pas de singularités) : $\Delta h_{12} = J = \frac{\lambda L}{d}.\frac{V^2}{2g}$.

En tenant compte de ces caractéristiques, l'équation de Bernoulli ci-dessus se simplifie en :

$$\boldsymbol{J = z_1 - z_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

A.N :

$$J = 850 - 700 \approx 150\ m$$

2. **Coefficient des pertes linéaires λ**

La formule de Cole Brook White s'écrit : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71d} + \frac{2{,}52}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$ ……………………… (2)

Pour déterminer le coefficient de frottement λ, on utilise la méthode des approximations successives :

1. On calcul λ en utilisant la formule de Nikuradsé : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71d}\right)$…………..…. (3)

Nous avons : $\varepsilon = 0.03 \ \ et \ \ D = 300\ mm$

(3)$\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{\left[-2\log\left(\frac{0.03}{300*3.71}\right)\right]^2} \approx 0.012$

Ce qui donne :

(1)$\Longrightarrow V = \sqrt{2gd\ (z_1 - z_2)/\lambda\ LV} \approx 2.712\ m/s$

Le nombre de Reynolds est donnée par : $R_e = \frac{V.\ d}{\nu} \Longrightarrow R_e \approx 7.2 * 10^5$

2. Connaissant la vitesse, le nombre Reynolds et le coefficient λ calculé par la formule (3), on peut alors déduire le coefficient des pertes linéaires λ par la formule de Cole Brook White :

$$\lambda = \frac{1}{\left[-2\log\left(\frac{0.03}{3.71 * 300} + \frac{2.52}{7.2 * 10^5\sqrt{0.012}}\right)\right]^2} \approx 0.014$$

3. En suivant les mm étapes précédentes, on procède à la 2ème itération en considérant la valeur de $\lambda \approx 0.014$ On obtient : $V \approx 2.514\ m/s$ et $R_e \approx 6.68 * \ 10^5$

$$\Longrightarrow \lambda = 0.014$$

Finalement : $\lambda = 0.014$ qui est la valeur du coefficient des pertes linéaires retenue.

3. **La vitesse et le débit d'écoulement**

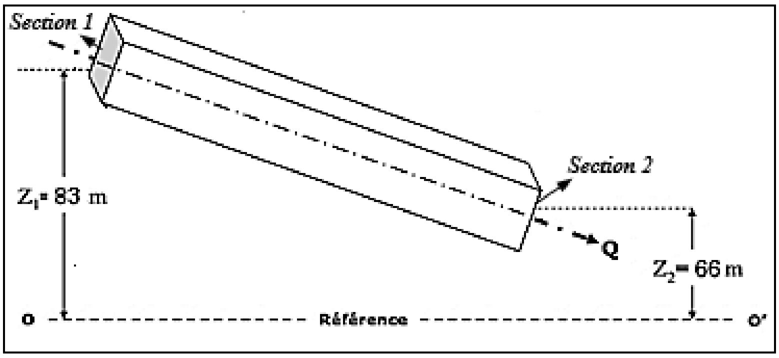
$\lambda \approx 0.014 \Longrightarrow V \approx 2.514\ m/s$

En utilisant l'équation de continuité : Q =V * S $\Longrightarrow Q = V.\frac{\pi d^2}{4} \approx 0.178\ m^3/$

EXERCICE 2

Données

- $\varepsilon = 0,5\ mm,$
- $\rho = 719\ kg/m^3,$
- $\mu = 2,92\ .\ 10^{-4} Pa.s,$
- $g = 9,81\ m/s^2$



1. **EXPRESSION DE LA VITESSE D'ECOULEMENT A TRAVERS LA CANALISATION EN FONCTION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT λ**

Le théorème de Bernoulli s'écrit entre les sections 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \frac{{V_1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\varpi} + z_2 + \frac{{V_2}^2}{2g} + \Delta h_{12} \qquad (1)$$

- $z_1 = 83m\ et\ z_2 = 66m,$
- $P_1 = P_2 = P_{atm}$
- La section de la conduite est constante : $V_1 = V_2,$
- Les pertes de charge sont linéaires (pas de singularités) : $\Delta h_{12} = J = \frac{\lambda L}{d} . \frac{V^2}{2g}.$
- $L = 965m$

Après simplification, l'équation (1) devient :

$$z_1 - z_2 = \frac{\lambda L}{d} . \frac{V^2}{2g} \qquad (2)$$

La section du tuyau étant rectangulaire, on remplace d par le rayon hydraulique R_H

$$R_H = \frac{\text{Section mouillée}}{\text{Périmètre mouillé}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = \frac{d}{4} \rightarrow d = 4 \cdot R_H$$

On remplace d par son expression dans (2)

$$z_1 - z_2 = \frac{\lambda L}{4 \cdot R_H} . \frac{V^2}{2g} \qquad (3)$$

On obtient ainsi l'expression de la vitesse V :

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{8.g.R_H.(z_1 - z_2)}}{\boldsymbol{\lambda.L}}} \qquad (4)$$

2. **Coefficient de frottement λ en utilisant la formule de Colebrook White**

La valeur initiale de λ se calcule par la formule de Nikuradsé :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\ log\left(\frac{\varepsilon}{3.71\ d}\right) = -2\ log\left(\frac{\varepsilon}{14.84\ \ R_H}\right) \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{\left[-2\ log\left(\frac{\varepsilon}{14.84\ \ R_H}\right)\right]^2}$$

- $\varepsilon = 0.5\ mm$
- $R_H = \frac{300 \times 460}{2(300+460)} = 90.789\ mm$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\left[-2\ log\left(\frac{0.5}{14.84\ \times 90.789}\right)\right]^2} = 0.021$$

$$(4) \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{8.g.R_H.(z_1 - z_2)}{\lambda.\mathrm{L}}} = \sqrt{\frac{8 \times 9.81 \times 0.090789 \times (83 - 66)}{0.021 \times 965}} = 2.445\ m/s$$

Le nombre de Reynolds se calcul comme suit :

$$R_e = \frac{V.d}{\nu} = \frac{4.V.R_H}{{}^{\mu}/_{\rho}} = \frac{4 \times 2.445 \times 0.090789}{2{,}92\ .10^{-4}/_{719}} = 218.634 \times 10^4$$

<u>Itération 1</u>

On calcule λ à partir de la formule de Cole Brook White : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71d} + \frac{2{,}52}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\left[-2\ \log\left(\frac{\varepsilon}{14.84\ \mathrm{R_H}} + \frac{2.52}{\mathrm{R_e}\sqrt{\lambda}}\right)\right]^2} = \frac{1}{\left[-2\ \log\left(\frac{0.5}{14.84\ \times 90.789} + \frac{2.52}{218.547 \times 10^4\sqrt{0.021}}\right)\right]^2} = 0.021$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 = 0.021$$

Finalement on retient :

$$\boldsymbol{\lambda = 0.021}$$

3. Débit d'écoulement à travers la canalisation

En utilisant l'équation de continuité : Q =V * S

S= 0.3 * 0.46 = 0.138 m^2

$$\Longrightarrow \boldsymbol{Q = 2.445 * 0.3 * 0.46 = 0.33741\ m^3/s}$$
