Série n°2 : Cinématique des fluides

Exercice1

On considère un écoulement permanent défini dans un repère $\begin{pmatrix} O \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ par le champ de vitesse

suivant, en variables d'Euler : $\vec{V} = \begin{cases} u = 2x - 3z \\ v = 0 \\ w = 3x - 2Z \end{cases}$

1/. Montrer que le fluide est incompressible

2/. Calculer le champ de vecteurs accélérations $\vec{a}$

3/. Déterminez les équations du réseau des lignes de courant

Exercice 3

La distribution de vitesse pour un écoulement d'un fluide parfait incompressible est donnée par :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \dfrac{-x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

1/. Sans faire de calcul, indiquer les propriétés particulières de cet écoulement. (Justifier)

2/. L'écoulement est-il conservatif ?

3/. L'écoulement est-il à potentiel de vitesse ? Si oui, calculer la fonction potentielle.

4/. Déterminer l'équation des lignes de courant et déduire l'équation des trajectoires.

Exercice 3

Soit l'écoulement défini par le champ de vitesse suivant :

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$$

1- Quelles sont les propriétés de cet écoulement. ?
2- L'écoulement est il irrotationnel ? Si oui, calculer la fonction potentielle.
3- Déterminer les lignes de courant, les trajectoires de cet écoulement.

Solution de la série n°2 : Cinématique des Fluides

Exercice1

Soit un écoulement permanent défini par le champ de vitesse suivant :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = 2x - 3z \\ v = 0 \\ w = 3x - 2Z \end{cases}$$

1. Fluide est incompressible ?

Pour monter qu'un fluide est incompressible en écoulement permanent, il suffit de vérifier que :

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0$$

Donc : $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Soient : $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial z} = -2$$

Ce qui donne : $\mathrm{div}\vec{V} = 2 + 0 - 2 = 0$

Le fluide est donc incompressible

2. Champs de vecteurs accélérations $\vec{a}$

En description Eulérienne, la variation totale de la vitesse est donnée par :

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ dw = \frac{\partial w}{\partial t}dt + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases}$$

Par la suite, l'accélération est donnée par :

$$\vec{a}\begin{cases} ax = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ ay = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ az = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Qui s'écrit :

$$\vec{a}\begin{cases} ax = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \\ ay = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w \\ az = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w \end{cases}$$

Sous forme vectorielle :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V)\vec{V}$$

Sous forme indicielle :

$$ai = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial xj}v_j$$

AN :

$$\vec{a}\begin{cases} ax = 2(2x - 3z) + 0 + (-3)(3x - 2z) \\ ay = 0 \\ az = 3(2x - 3z) + 0 + (-2)(3x - 2z) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\vec{a}\begin{cases} ax = 4x - 6z - 9x + 6z \\ ay = 0 \\ az = 6x - 9z - 6x + 4z \end{cases}$$

Enfin, nous avons :

$$\vec{a}\begin{cases} ax = -5x \\ ay = 0 \\ az = -5z \end{cases}$$

3. Equations du réseau des lignes de courant

L'équation des lignes de courant est donnée par :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dv}{v} = \frac{dz}{w}$$

L'écoulement étant plan, nous avons :

$$\frac{dx}{2x - 3Z} = \frac{dz}{3x - 2z}$$

Après intégration, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\ln(2x - 3z) = -\frac{1}{2}\ln(3x - 2z) + A$$
$$\ln(2x - 3z) + \ln(3x - 2z) = A = \ln C$$

Enfin l'équation des lignes de courant s'écrit :

$$\mathbf{(2x - 3z)(3x - 2z) = C}$$

Exercice 2

Soit le champs de vitesse :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \dfrac{-x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

1. Les propriétés de l'écoulement

- Plan : le vecteur vitesse, $\vec{V}$, n'a que deux composantes non nulles selon les axes x et y. La composante selon z est $\vec{w} = 0$.
- Permanent : les composante de $\vec{V}$ ne dépendent du temps.

2. Écoulement conservatif

Pour vérifier que le fluide en écoulement est incompressible, il suffit de vérifier que : $div(\vec{V}) = 0$.

Avec : $$div(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left[\frac{1 . (x^2 + y^2) - 2x\,(x)}{(x^2 + y^2)^2}\right] = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\left[\frac{1 . (x^2 + y^2) - 2y\,(y)}{(x^2 + y^2)^2}\right] = -\left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad div(\vec{V}) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] = 0$$

L'écoulement (ou le fluide en écoulement) est donc conservatif.

3. Écoulement à potentiel des vitesses

Pour un écoulement plan, si la vorticité (le vecteur tourbillon, $\vec{\Omega}$) est nulle, les vitesses dérivent d'un potentiel et l'écoulement est appelé « écoulement potentiel » (ou « écoulement à potentiel des vitesses »).

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$$

Calcul du rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{-x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial Z}\right]\vec{\imath} - \left[\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)}{\partial Z}\right]\vec{\jmath} + \left[\frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{-x}{x^2+y^2})}{\partial y}\right]\vec{k}$$

$$= 0\,\vec{\imath} - 0\,\vec{\jmath} + \left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right]\vec{k} = 0$$

$\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$, donc l'écoulement est irrotationnel, les vitesses dérivent d'un potentiel et l'écoulement est appelé écoulement à potentiel des vitesses.

La fonction potentielle

L'écoulement est irrotationnel donc les vitesses dérivent d'un potentiel $\boldsymbol{\phi}$, tel que :

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{\phi}$$

Par identification : $u = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y}\ et\ w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$

Nous avons : $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy$

$$d\phi = \frac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-y}{x^2+y^2}\,dy$$

Pour déterminer la fonction ϕ il faut passer par l'intégral de $d\phi$:

$$\phi = \int d\phi = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \int \frac{-y}{x^2+y^2}dy$$

En multipliant et en divisant par (-2), on écrit :

$$\phi = \int d\phi = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+x^2}dy$$

$$\Rightarrow \phi = \int d\phi = -\frac{1}{2}\,L_n(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\,L_n(x^2+y^2) + cte$$

$$\Rightarrow\ \phi = -L_n(x^2+y^2) + \text{Cte}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{L_n}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+y^2}} + \boldsymbol{C}$$

Équation des Lignes de courant

Pour un écoulement permanent plan d'un liquide incompressible, l'équation différentielle des lignes de courant s'écrit : $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

En remplaçant *u* et *v,* cette équation devient :

$$\frac{dx}{\frac{-x}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\frac{-y}{x^2+y^2}}$$

Ce qui donne (par simplification) :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

L'intégration s'écrit : $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$

$\Rightarrow\ L_n x = L_n y + C$: où : C est une constante quelconque qu'on peut écrire $C = L_n A$

$$\Longrightarrow L_n x = L_n y + L_n A = L_n(Ay)$$

Ou bien : $e^{L_n x} = e^{L_n(A\,y)}$

Finalement : $x = A.y$ ou bien : $y = \frac{x}{A}$ est l'équation des lignes de courant, où A est une constante quelconque.

Trajectoire

Puisque l'écoulement est permanent, les lignes de courant et les trajectoires sont confondues. Leur équation est donc identique : $y = \frac{x}{A}$. Chaque trajectoire (ligne de courant) est caractérisée par une constante *A*.

Exercice 3

Soit l'écoulement défini par le champ de vitesse suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{u} = \mathrm{x} \\ \mathrm{v} = -\mathrm{y} \end{cases}$$

1- Propriétés de cet écoulement

L'écoulement est plan permanent, le vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ a deux composantes non nulles selon les axes x, y et indépendantes du temps. La composante selon z est $\vec{\mathrm{w}} = 0$.

2- Ecoulement irrotationnel

Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$

Calcul du rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & -y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(y)}{\partial Z}\right]\vec{\imath} - \left[\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial Z}\right]\vec{\jmath} + \left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x\,)}{\partial y}\right]\vec{k} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$, donc l'écoulement est irrotationnel, les vitesses dérivent d'un potentiel et l'écoulement est appelé écoulement à potentiel des vitesses. L'écoulement est irrotationnel donc les vitesses dérivent d'un potentiel $\boldsymbol{\phi}$**,** tel que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad\phi}$$

Soit : $$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy$$

Où : $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Longrightarrow \boldsymbol{\phi} = \frac{x^{é}}{2} + f_1(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -y \Longrightarrow \boldsymbol{\phi} = -\frac{y^2}{2} + f_2(x)$$

$$\frac{x^{é}}{2} + f_1(y) = -\frac{y^2}{2} + f_2(x)$$

Par identification, on a : $\mathrm{f_1(y)} = -\frac{\mathrm{y}^2}{2}$ et $\mathrm{f_2(x)} = \frac{\mathrm{x}^2}{2}$

Donc : $$\boldsymbol{\phi(x, y)} = \frac{x^{é}}{2} - \frac{y^2}{2}$$

3- Equation des lignes de courant, les trajectoires de cet écoulement.

a- Équation des Lignes de courant

Pour un écoulement permanent plan d'un liquide incompressible, l'équation des lignes de courant s'écrit :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

En remplaçant *u* et *v,* cette équation devient :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

Ce qui donne (par simplification) :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Après intégration, on obtient :

$L_n x = L_n \frac{1}{y} + lnC$: où : C est une constante quelconque qu'on peut écrire $C = L_n A$

$$\Longrightarrow L_n x = L_n \frac{C}{y}$$

Ce qui donne : $$x = \frac{C}{y}$$

ou bien : $y = \frac{C}{x}$ *l'équation des lignes de courant, où C est une constante quelconque. Les lignes de courants sont des hyperboles.*

b- Equation de la trajectoire

Sachant que : $u = \frac{dx}{dt} = x$ et $v = \frac{dy}{dt} = -y$

Nous avons : $\frac{dx}{x} = dt$ et $\frac{dy}{y} = -dt$

Ce qui donne : $L_n x = t + C_1\ et\ lny = -t + C_2$:

On tire : $t = lnx - C_1$

D'où l'on tire : $L_n y + lnx = B$:

Ou bien $yx = B$ et enfin $y = \frac{B}{x}$ équation d'une hyperbole

En écoulement permanent les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires.