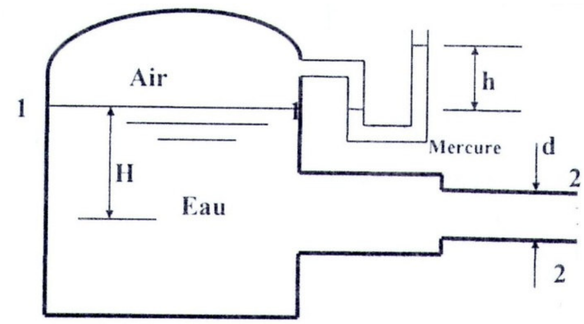
Série n°3 : Dynamique des fluides

Exercice 1

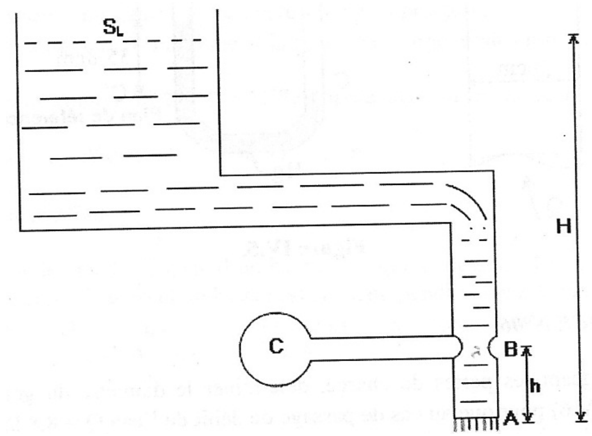
Déterminer le débit Q évacué par la conduite représentée par la figure1 ci-contre. On donne :

- Le diamètre de la conduite : d = 50mm
- La hauteur d'eau : H= 1m
- La hauteur du mercure : h= 15cm
- La masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3 kg/m^3$
- La masse volumique du mercure : $\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$



Exercice 2

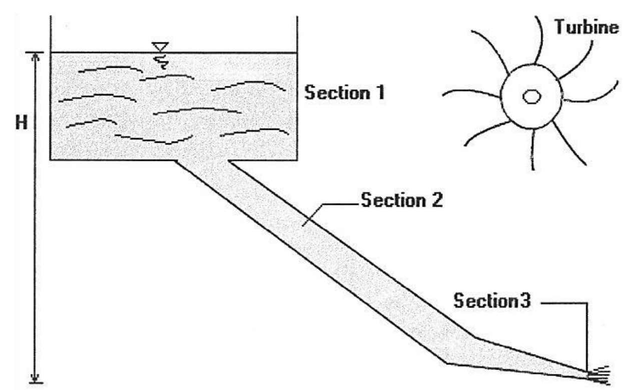
Ce problème représente le principe d'une trompe à eau; on suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible et on étudie le régime permanent.



1. L'eau provient d'une citerne, elle s'écoule à travers un tube vertical ouvert à l'air libre à son extrémité inférieur A. la section en A est S_A est très petite devant la section au niveau de la surface libre S_L située à une hauteur H au dessus de A. Calculer la vitesse V_A de l'eau en A.
2. Le tube a un rétrécissement en B à une hauteur h au-dessus de A. la section de ce niveau B a la valeur S_B. Calculer la vitesse V_B de l'eau en B.
3. Calculer la pression P_B au niveau de B.
4. Au niveau de B est percée sur la côté du tube une petite communication avec un volume C. Calculer la pression P_C en C. interprétez physiquement le résultat.
5. Calculer $V_A, V_B\ et\ P_B$ pour :
   H= 0,2 m, h =2cm, $S_A = 1cm^2,\ S_B = 0{,}25cm^2$, g= 10$m/s^2$, $P_{atm} = 76\ cm\,Hg$,
   $\rho_{Hg} = 13{,}6 * 10^3 Kg/m^3$

Exercice 3

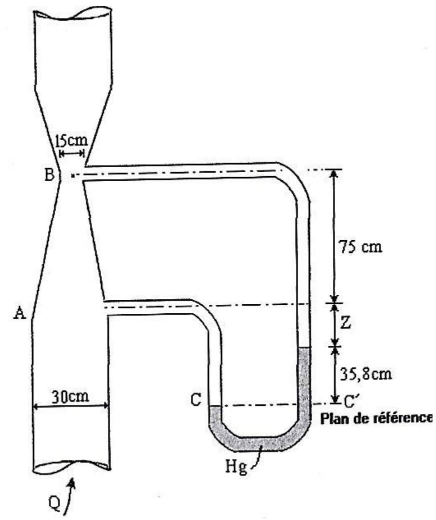
La conduite forcée représentée sur la figure ci-contre est alimentée par un réservoir à niveau d'eau constant. Déterminer :



1. La vitesse de sortie V_3
2. La vitesse dans la conduite V_2
3. La puissance maximale P_T que la turbine peut produire
4. Tracer la ligne piézométrique et la ligne de charge totale entre les sections 1 et 3.

Données H= 200 m, D_2=4m, D_3=3m, g=9,81m/s²

Exercice 4



Dans le tube de venturi représenté par la figure ci-contre, circule de l'eau de masse volumique $\rho = 1000kg/m^3$.

La dénivellation du mercure du manomètre différentiel est 35,8 cm. Calculer le débit d'eau à travers l'appareil si aucune énergie n'est perdu entre A et B

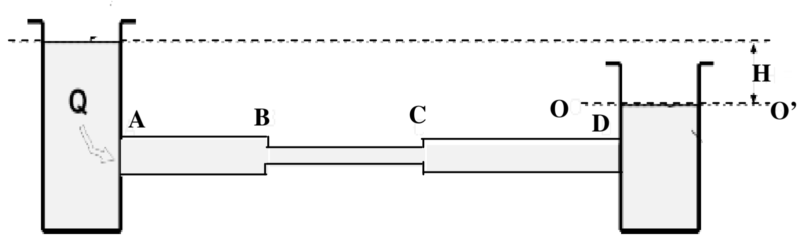
Exercice 5

Soient deux réservoirs liés par trois conduites circulaires de diamètres d_{AB}= 300 mm, d_{BC}= 200 mm, d_{CD}= 250 mm et de longueurs L_{AB} = 2000 m, L_{BC}= 2500 m, L_{CD}= 3000 m respectivement. L'écoulement d'eau passant par les conduites est caractérisé par un débit Q=29 l/s. Les coefficients de frottements sont donnés respectivement par : $\lambda_{AB} = \lambda_{CD} = 0.015\ \ et\ \lambda_{BC} = 0.020.$ La viscosité du fluide est : $\mu = 10^{-3}\ kg/(m.s)$.

1. Calculer les vitesses dans les conduites.
2. Déterminer le régime d'écoulement.
3. Calculer les pertes de charges linéaires.
4. Calculer les pertes de charges singulières.
5. Déterminer la différence de niveau H
   entre les deux surfaces libres des deux réservoirs en considérant comme plan de référence l'axe OO'.

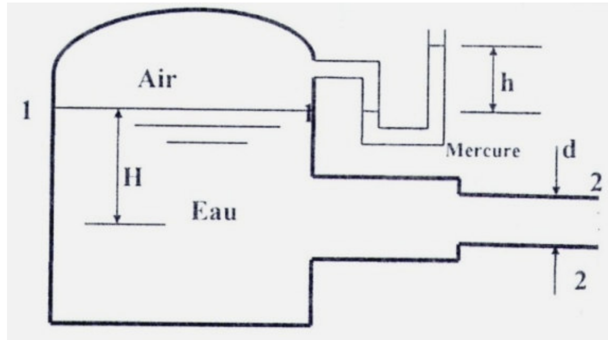
6. Tracer la ligne de charge totale et la ligne piézométrique.

On donne : $\rho - 10^3\ kg/m^3$,g= 9.81 m/s^2.



Solution de la série dynamique des fluides

Exercice 1



Donnée : d = 50mm, H= 1m, h= 15cm:,
$\rho = 10^3 kg/m^3$, $\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$

1- Calcul du débit Q évacué par la conduite

L'équation de Bernoulli entre la surface libre du réservoir (1-1) et la sortie de la conduite (2-2), en absence de partes de charge, s'écrit :

$$\frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \alpha\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\varpi} + z_2 + \alpha\frac{V_2^2}{2g}$$

Si l'on considère l'axe de la conduite comme PDR (Plan de référence), il vient :

Section 1-1	Section 2-2
$P_1 = P_{air}$ =ρgh	$P_2 = 0$
$z_1 = H$	$z_2 = 0$
$V_1 \approx 0$	$V_2 = V$
$\alpha = 1$	

L'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{P_{air}}{\varpi} + H += \frac{V^2}{2g}$$

Ce qui donne :

$$V_2 = \sqrt{2g(\frac{P_{air}}{\varpi} + H)}$$

AN :

$$V_2 = \sqrt{2.10.g(\frac{13600.10.0,5}{1000} + 1}$$

On obtient : $V_2 = 7{,}79 m/s$

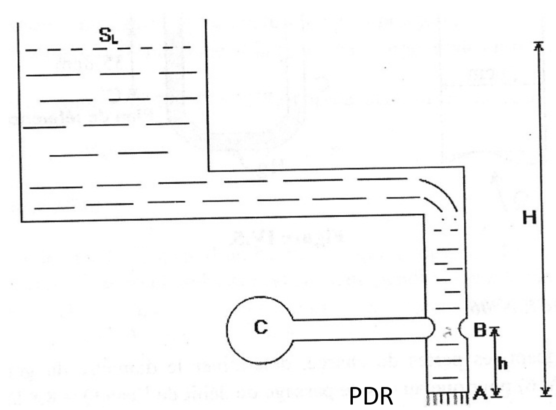
Par la suite : $Q = V_2 S_2$

Avec : $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$

Donc : $Q = V_2 \frac{\pi d^2}{4}$

AN : $7{,}79.\frac{\pi 3.14.(0{,}05)^2}{4}$ donc $\boldsymbol{Q = 15{,}5 l/s}$

Exercice 2



Données

H= 0,2 m, h =2cm, $S_A = 1cm^2$, $S_B = 0{,}25cm^2$, g= 10r
$\rho_{Hg} = 13{,}6 * 10^3 Kg/m^3$

1- **Calcule de la vitesse V_A**

L'équation de Bernoulli entre la surface libre du réserv
absence de partes de charge, s'écrit :

$$\frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \alpha\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\varpi} + z_2 +$$

avec :

Section 1-1	**Section 2-2**
$P_1 = P_0$	$P_2 = P_0$
$z_1 = H$	$z_2 = 0$
$V_1 = 0$	$V_2 = V_A$
$\alpha = 1$	

Ce qui donne : $H = \dfrac{V_A^2}{2g}$

D'où : $V_A = \sqrt{2gH}$ **AN :** $V_A = \sqrt{2\,(10)(0,2)}$ **=2m/s**

2- **Calcule la vitesse V_B de l'eau en B**

L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_A S_A = V_B S_B$$

avec :

$$V_B = \frac{V_A S_A}{S_B}$$

Donc : $V_B = \dfrac{2.1.10-4}{(0.25).10-4} = 8m/s$

3- **Calcul de la pression P_B**

L'équation de Bernoulli entre la section (A) et la section (B) s'écrit :

$$\frac{P_B}{\varpi} + z_B + \alpha\frac{V_B^2}{2g} = \frac{P_A}{\varpi} + z_A + \alpha\frac{V_A^2}{2g} \qquad (\alpha = 1)$$

Section (B)	**Section A**
$P_B = ?$	$P_A = P_0$
$z_B = \text{h}$	$z_A = 0$
$V_B = 8m/s$	$V_A = 2m/s$
$\alpha = 1$	

$$\frac{P_B}{\varpi} + +\alpha\frac{V_B^2}{2g} = \frac{P_o}{\varpi} + \frac{V_A^2}{2g}$$

Ce qui donne :

$$\frac{P_B}{\varpi} = +\frac{P_o}{\varpi} + \frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_B^2}{2g}$$

$$P_B = \varpi + P_o + (\frac{V_A^2 - V_B^2}{2})$$

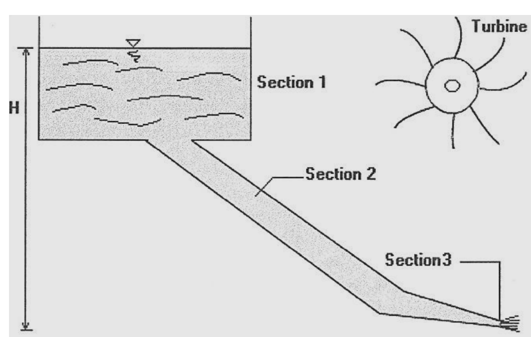
AN :

$$P_B = 0{,}76.13600.10 + 10.10^3\left(\frac{2^2 - 8^2}{2}\right) + 0{,}2.10.10^3$$

Enfin :

$$\boldsymbol{P_B = 73160pa = 549mmHg = 0,73atm}$$

Calcule de la pression P_C en C. $P_C = P_B$



Exercice 3

Données H= 200 m, D_2=4m, D_3=3m, g=9,81m/s²

1. Calcul de la vitesse de sortie V_3

L'équation de Bernoulli entre la section 1(surface libre du réservoir) et la section (3), en absence de partes de charge, s'écrit :

$$\frac{P_1}{\varpi}+z_1+\alpha\frac{V_1{}^2}{2g}=\frac{P_3}{\varpi}+z_3+\alpha\frac{V_3{}^2}{2g}$$

Si l'on considère comme plan de référence l'axe passant par la section 3, il vient :

Section 1	**Section 2-2**
$P_1 = P_o$	$P_3 = P_o$
$z_1 = H$	$z_3 = 0$
$V_1 \approx 0$	$V_3 = ?$
$\alpha = 1$	

L'équation de Bernoulli devient :

$$H += \frac{V_3^2}{2g}$$

Ce qui donne :

$$V_3 = \sqrt{2gH}$$

AN :

$$V_3 = \sqrt{2.9.81.200}$$

On obtient :

$$V_2 = 62{,}64 m/s$$

2. Calcul de la vitesse V_2

L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_2S_2 = V_3S_3$$

Avec :

$$V_2 = \frac{V_3S_3}{S_2} = \frac{V_3D_3^2}{D_2^2}$$

AN :

$$62{,}64.\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Enfin :

$$V_2 = \mathbf{35{,}24}\,\boldsymbol{m/s}$$

3. Calcul de la puissance maximale P_T que la turbine peut produire

$$P_t = wH_3Q$$

avec :

$$H_3 = \frac{P_3}{\varpi}+z_3+\alpha\frac{V_3{}^2}{2g}$$

Donc :

$$H_3 = \frac{V_3{}^2}{2g}$$

Par la suite :

$$P_t = \rho g Q\frac{V_3{}^2}{2g}$$

$$Q = V_3\frac{\pi D_3^2}{4}$$

On obtient :

$$P_t = \rho\frac{V_3{}^3}{2}\frac{\pi D_3^2}{4}$$

AN :

$$P_t = 10^3\,\frac{62{,}64^3}{2}\,\frac{3{,}14(3)^2}{4}$$

Enfin :

$$P_t = \mathbf{868{,}23524\ Mw}$$

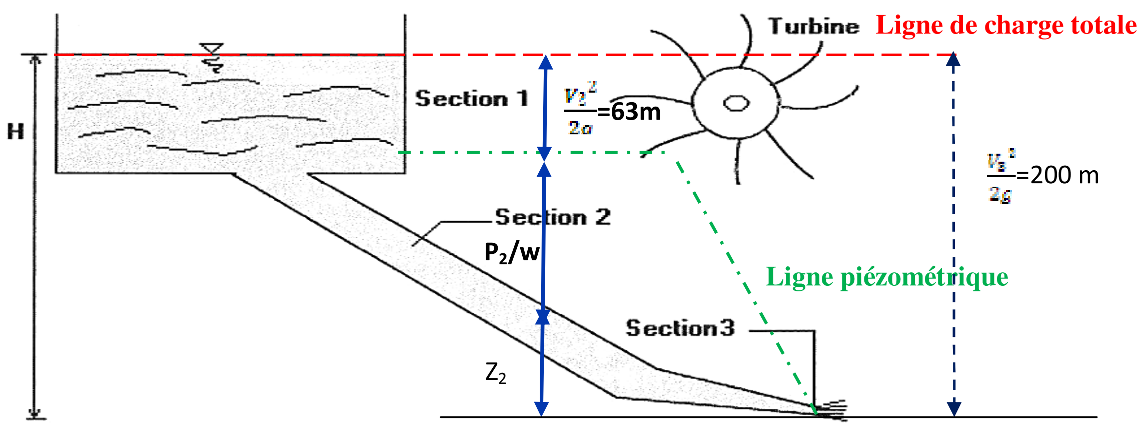
4. La ligne de charge totale et la ligne piézométrique

La charge totale en un point quelconque de la section 2 :

$$\frac{P_2}{\varpi} + z_2 + \alpha\frac{V_2^{\,2}}{2g} = H_2 = H$$

$$\frac{P_2}{\varpi} + z_2 = H - \frac{V_2^{\,2}}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\varpi} + z_2 = 200 - \frac{35{,}24^2}{2(9.81)} = 200 - 63 = 137m(Hauteur\ pièzométrique)$$



Exercice 4 : Données : $\rho = 1000kg/m^3$. h=35,8 cm.

1- Calculer le débit d'eau à travers l'appareil

- L'équation de Bernoulli entre les sections (A) et (B), en absence de partes d'énergie s'écrit :

$$\frac{P_A}{\varpi} + z_A + \alpha\frac{V_A^{\,2}}{2g} = \frac{P_B}{\varpi} + z_B + \alpha\frac{V_B^{\,2}}{2g}$$

Pour α=1, nous écrivons :

$$\left(\frac{P_A}{\varpi} - \frac{P_B}{\varpi}\right) = (z_B - z_A) + \left(\frac{V_B^{\,2}}{2g} - \frac{V_A^{\,2}}{2g}\right)$$

- L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_A S_A = V_B S_B$$

Donc :

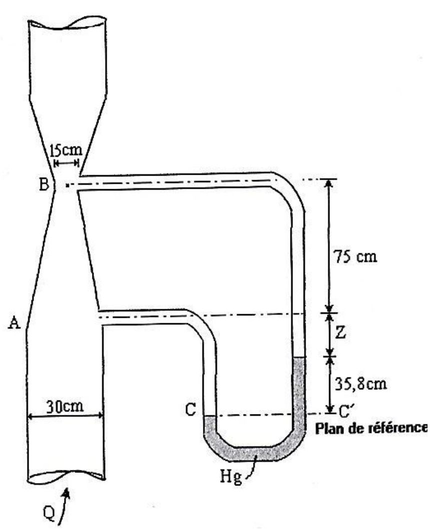
$$V_A = \frac{V_B S_B}{S_A} = \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2 V_B$$

Ce qui donne ;

$$V_A = \left(\frac{15}{30}\right)^2 V_B = \frac{1}{4}V_B$$

Par ailleurs, l'équation manométrique s'écrit :

$$P_A + \varpi_e(Z + 0{,}358) - \varpi_{Hg}0{,}358 - \varpi_e(Z + 0{,}750) = P_B$$



$$\frac{P_A - P_B}{\varpi_e} = -(Z + 0{,}358) + \theta_{Hg} 0{,}358 + \theta_e (Z + 0{,}750)$$

$$\frac{P_A - P_B}{\varpi_e} = -(0{,}358) + 13{,}6(0{,}358) + (+0{,}750) = 5{,}26m$$

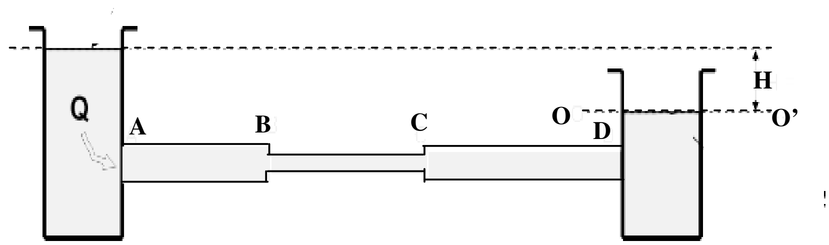
Ce qui donne : $$5{,}26 = 0{,}75 + \frac{V_B{}^2}{2g} - \frac{1}{16}\frac{V_B{}^2}{2g}$$

$$V_B = \sqrt{\frac{(5{,}26 - 0{,}75)2.10}{1 - \frac{1}{16}}} = 9{,}71 m/s$$

Enfin : $$Q = V_B \frac{\pi d^2}{4}$$

$$9{,}71 \frac{3{,}14\,(0{,}15)^2}{4} = 0{,}171 m^3/s$$

Exercice 5



1. **Calcul des vitesses dans les conduites**

De l'équation de continuité : $Q = V.S = V.\frac{\pi d^2}{4}$ donc : $V = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2}$

❖ *La vitesse dans la conduite AB*

$$V_{AB} = \frac{4\,Q}{\pi.\, d_{AB}{}^2} = \frac{4.\ 29.\ 10^{-3}}{\pi.\ (300.\ 10^{-3})^2} \Rightarrow V_{AB} = 0.410\ m/s$$

❖ *La vitesse dans la conduite BC*

$$V_{BC} = \frac{4\,Q}{\pi.\ d_{BC}{}^2} = \frac{4.\ 29.\ 10^{-3}}{\pi.\ (200.\ 10^{-3})^2} \Rightarrow V_{BC} = 0.923\ m/s$$

❖ *La vitesse dans la conduite CD*

$$V_{CD} = \frac{4\,Q}{\pi.\ d_{CD}{}^2} = \frac{4.\ 29.\ 10^{-3}}{\pi.\ (250.\ 10^{-3})^2} \Rightarrow V_{CD} = 0.590\ m/s$$

2. **Le régime d'écoulement**

Le régime d'écoulement peut être caractérisé par le nombre de Reynolds qui correspond au rapport entre les forces d'inertie et les forces de pesanteur, il s'écrit : $R_e = \frac{V.\ d}{\nu}$

Avec : *V : vitesse de l'écoulement dans la conduite*
ν : viscosité cinématique
d : diamètre de la conduite

Il peut être également exprimé par : $R_e = \frac{\rho . V . D}{\mu}$ où : μ : viscosité dynamique (kg/m.s)

ρ: masse volumique (kg/m³)

Conduite AB

$$R_e = \frac{10^3 .\ 0.410 .\ 300 .\ 10^{-3}}{10^{-3}} = 123000$$

R_e= 123000 > 4000 ⇒ l'écoulement est turbulent

De même pour les conduites BC et CD, le nombre de Reynolds est égal respectivement :
$R_e = 184600$ et $R_e = 147500$ > 4000 , donc le régime est tjrs turbulent.

3. Calcul des pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaire se calcul par l'équation de *Darcy -Weisbach* :

$$\Delta h_l = \lambda \frac{L}{D_h} . \frac{V^2}{2g}; \qquad (D_h = d)$$

- Ecoulement turbulent

$$\lambda = \frac{1}{\left[1{,}14 - 0{,}86 \ln \frac{\varepsilon}{D}\right]^2}$$

- Ecoulement laminaire : $\lambda = \frac{64}{Re}$

➢ $$\Delta h_{L\,AB} = \frac{\lambda_{AB} L_{AB}}{d_{AB}} . \frac{V_{AB}{}^2}{2g}$$

$$= \frac{0{,}015 .\ 2000}{0{,}3} . \frac{(0.410)^2}{2 .\ 9{,}81} \approx 0.85678 \text{ m}$$

➢ $$\Delta h_{L\,BC} = \frac{\lambda_{BC} L_{BC}}{d_{BC}} . \frac{V_{BC}{}^2}{2g}$$

$$= \frac{0{,}020 .\ 2500}{0{,}2} . \frac{(0.923)^2}{2 .\ 9{,}81} \approx 10.85536 \text{ m}$$

$$\Delta h_{L\,CD} = \frac{\lambda_{CD} L_{CD}}{d_{CD}} . \frac{V_{CD}{}^2}{2g}$$

$$= \frac{0{,}015 .\ 3000}{0{,}25} . \frac{(0.590)^2}{2 .\ 9{,}81} \approx 3.19358\, m$$

4. Calcul des pertes de charge singulières

a. Sortie du réservoir 1 et entrée dans la conduite AB

Les pertes singulières sont données par : $\Delta h_s = \xi \frac{V^2}{2g}$

À l'entrée d'une conduite, à partir d'un grand réservoir, l'expérimentation a évalué la valeur du coefficient, ξ, de la singularité : $\xi = 0{,}5$.

La perte de charge singulière à l'entrée de la conduite AB est donc :

$$\Delta h_{s\,AB} = \xi \frac{V_{AB}{}^2}{2g} = 0{,}5 . \frac{0.410^2}{2 . 9{,}81} = 0{,}00428 \text{ m}$$

b. Rétrécissement brusque

Dans le cas d'un rétrécissement brusque le coefficient ξ est donné par :

$$\xi = \left[\frac{A_{BC}}{A_{AB}} - 1\right]^2 = \left(\frac{d_{BC}{}^2}{d_{AB}{}^2} - 1\right)^2 = \left[\left(\frac{200}{300}\right)^2 - 1\right]^2 = 0.30864$$

La perte de charge singulière à l'entrée de la conduite BC est donc :

$$\Delta h_{s\,BC} = \xi \frac{V_{BC}^2}{2g} = 0{,}30864 \,.\, \frac{0.923^2}{2.9{,}81} = 0{,}01340 \text{ m}$$

c. Élargissement brusque

Dans le cas d'un élargissement brusque le coefficient ξ est donné par :

$$\xi = \left[1 - \frac{A_{BC}}{A_{CD}}\right]^2 = \left(1 - \frac{d_{BC}^2}{d_{CD}^2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{200}{250}\right)^2\right]^2 = 0.1296$$

La perte de charge singulière à l'entrée de la conduite CD est donc :

$$\Delta h_{s\,CD} = \xi \frac{V_{BC}^2}{2g} = 0{,}1296 \,.\, \frac{0.923^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}00563 \text{ m}$$

Sortie de la conduite CD et entrée dans le réservoir 2

À l'entrée d'un réservoir, l'expérimentation a évalué la valeur du coefficient, ξ, de la singularité : $\xi = 1$

La perte de charge singulière à l'entrée du réservoir 2 est donc :

$$\Delta h_{s\,D} = \xi \frac{V_{CD}^2}{2g} = 1 \,.\, \frac{0.590^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}01774 \text{ m}$$

5. La différence de niveau H entre les deux surfaces libres des deux réservoirs / OO'

L'application de l'équation de Bernoulli entre la surface libre du réservoir1 et la surface libre du réservoir 2 donne :

$$\frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\varpi} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum \Delta h$$

Par rapport à l'axe de référence OO' nous avons :

Au niveau de la surface libre du réservoir1	Au niveau de la surface libre du réservoir 2
$P_1 = P_{atm}$	$P_2 = P_{atm}$
$z_1 = H$	$z_2 = 0$
$V_1 \approx 0$	$V_2 \approx 0$

En remplaçant chaque terme, l'équation de Bernoulli donne :

$$\boldsymbol{H = \sum \Delta h = \Delta h_L + \Delta h_s}$$

Finalement:

$$H = (0.85678 + 10.85536 + 3.19358) + (0{,}00428 + 0{,}01340 + 0{,}00563 + 0{,}01774)$$

$$\mathbf{H = 14.94677 \approx 15m}$$

6. Tracé de la ligne de charge et la ligne piézométrique

La ligne de charge totale et la ligne piézométrique sont représentées sur la figure ci-dessous :