Partie A : Statistiques

Chapitre I : Définitions de base

I. Notions de Statistiques

1. **Population :** C'est un ensemble de personnes ou d'objets soumis à une étude statistique. On note cet ensemble Ω (on parle alors de recensement).

2. **Echantillon :** Si on étudie uniquement une partie de la population, cette partie est appelée *échantillon* (ce qui est souvent le cas).

3. **Individus :** Un élément de la population est appelé *individu* ou *unité statistique*. Le nombre d'individus composant un échantillon est noté ***n*** et s'appelle *taille* de l'échantillon.

4. **Variable :** Tout ce qui peut être mesurable ou identifiable est appelé *variable* et sera noté ***X***.
   Exemples : la taille, l'âge, la couleur des yeux…
   La valeur de la variable ***X*** pour l'individu ***i*** sera noté x_i.
   On distingue deux types de variables :

   a) **Variables à caractère quantitatif :** il en existe deux types :

   - ***Variables à caractères quantitatif discret :*** Dans ce cas les valeurs possibles de la variable sont des valeurs isolées $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

   Exemple : notes d'un examen, nombres d'enfants,…

   - ***Variables à caractère quantitatif continu :*** Dans ce cas, les valeurs possibles constituent tout un intervalle $[m, M]$.

   Exemple : Taille d'un individu, durée d'un appel téléphonique,…

   b) **Variables à caractère qualitatif :** elles s'expriment par l'appartenance d'un individu à une catégorie donnée.

   Exemple : Nationalité, couleur des yeux, …

II. Séries statistiques à une variable

1. **Définitions**

   a) **Effectif :** Le nombre d'individus ayant la valeur x_i s'appelle *effectif*. On le note $\boldsymbol{n_i}$ et on a :

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_i = n$$

   b) **Fréquence :** La fréquence relative a un effectif donné est le quotient de cet effectif par la taille de l'échantillon. On la note f_i tel que :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

   c) **Effectif cumulé en x_i :** On le note N_i tel que :

$$N_i = \sum_{j=1}^{j=i} n_j$$

d) Fréquence cumulée en x_i: On la note $\boldsymbol{F_i}$ tel que :

$$F_i = \sum_{j=1}^{j=i} f_j$$

2. Représentation graphique

a) Variable qualitative

- ***Secteur circulaire :*** On construit un cercle de rayon unité. Les fréquences sont représentées par les surfaces des secteurs correspondant aux modalités de la variable :

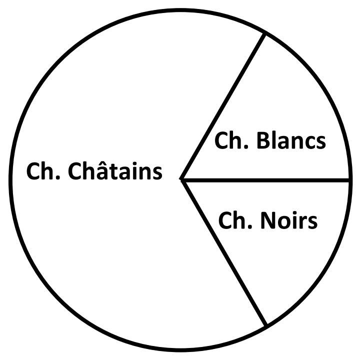
$$\alpha_i = 2\pi \cdot f_i = \frac{2\pi}{n} \cdot n_i$$

tel que :

$$\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i = 2\pi$$

<u>Exemple :</u> L'étude statistique (ainsi que la représentation graphique) de la variable *X* associée à la couleur des cheveux d'un échantillon de 60 personnes est donnée dans le tableau suivant :

x_i	n_i	α_i
Cheveux blancs	10	$\frac{2\pi}{60} \cdot 10 = \frac{\pi}{3}$
Cheveux châtains	40	$\frac{2\pi}{60} \cdot 40 = \frac{4\pi}{3}$
Cheveux noirs	10	$\frac{2\pi}{60} \cdot 10 = \frac{\pi}{3}$
Taille de l'échantillon	60	$\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$

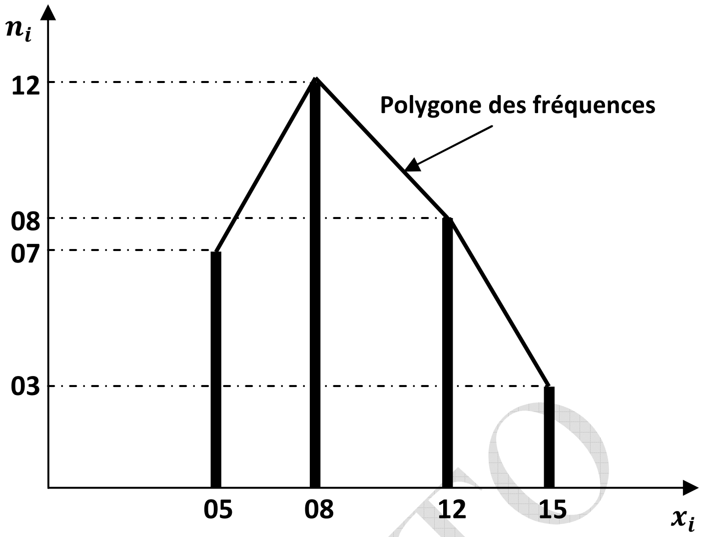


b) Variable quantitative discrète

- ***Diagramme en bâtons :*** C'est un ensemble de bâtons ayant pour abscisses les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de la variable *X* et pour chacun des points d'abscisses x_i une ordonnée proportionnelle à l'effectif n_i de x_i.

<u>Exemple :</u> L'étude statistique (ainsi que la représentation graphique) de la variable *X* associée aux notes obtenues à un examen par 30 élèves est donnée ci-dessous :

x_i	n_i	f_i
05/20	07	$\frac{7}{30} = 0.23$
08/20	12	$\frac{12}{30} = 0.40$
12/20	08	$\frac{8}{30} = 0.26$
15/20	03	$\frac{3}{30} = 0.10$
Total	30	$\frac{7}{30} + \frac{12}{30} + \frac{8}{30} + \frac{3}{30} = 1$



- ***Polygone des effectifs ou des fréquences :*** On l'obtient en joignant par des segments de droite les extrémités des bâtons (voir exemple précédent).

c) Variables quantitative continues

- ***Histogramme (Cas où les classes ont la même amplitude) :*** C'est un ensemble de rectangles ayant pour largeur l'amplitude de la classe et pour hauteur l'effectif de la classe.

Amplitude des classes a_i :

$$a_i = e_i^{sup} - e_i^{inf}$$

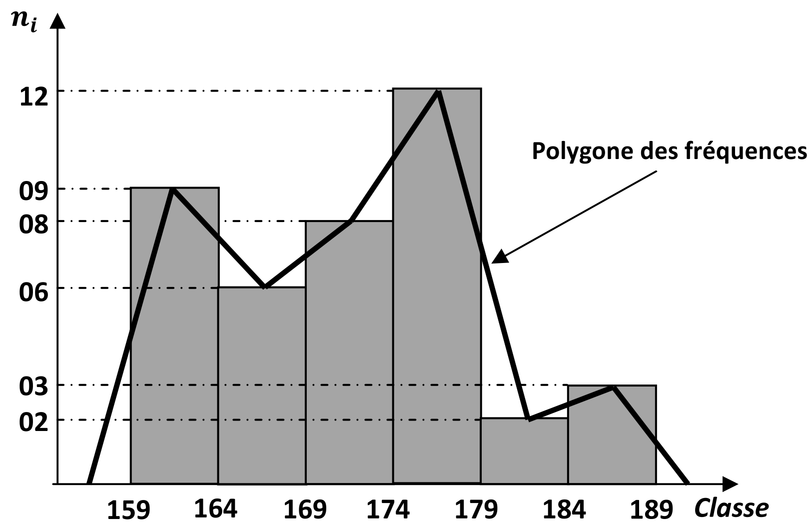
où :

e_i^{sup} : Borne supérieur d'une classe.

e_i^{inf} : Borne inférieur d'une classe.

<u>Exemple :</u> L'étude statistique (ainsi que la représentation graphique) de la variable *X* associée à la taille des étudiants est donnée dans le tableau suivant :

Classe (cm)	n_i	f_i
$[159, 164]$	09	0.225
$[164, 169]$	06	0.150
$[169, 174]$	08	0.200
$[174, 179]$	12	0.300
$[179, 184]$	02	0.050
$[184, 189]$	03	0.075
Total	40	1



- ***Polygone des effectifs ou des fréquences :*** On l'obtient en joignant par des segments de droite les milieux des bases supérieures des différents rectangles (voir exemple précédent).

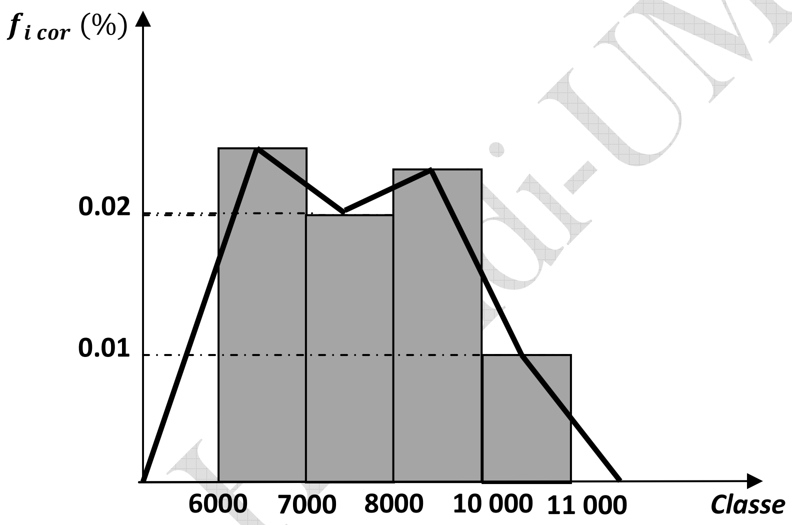
- ***Histogramme (cas d'inégalités des amplitudes)***

  Dans ce cas on utilisera les fréquences corrigées par unité d'amplitude pour la hauteur :

$$f_{i\,cor} = \frac{f_i}{a_i}$$

Exemple : L'étude statistique (ainsi que la représentation graphique) de la variable X associée au salaire des étudiants est donnée dans le tableau suivant :

Salaire (DA)	n_i	f_i (%)	a_i	$f_{i\,cor}$ (%)
$[6000, 7000[$	12	24	1000	0.024
$[7000, 8000[$	10	20	1000	0.02
$[8000, 10\,000[$	23	46	2000	0.023
$[10\,000, 11\,000[$	05	10	1000	0.01



3. Courbes cumulatives – Fonction de répartition

La fonction de répartition notée F est fonction des fréquences cumulées.

a) Cas discret

Soit la variable discrète X qui prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.

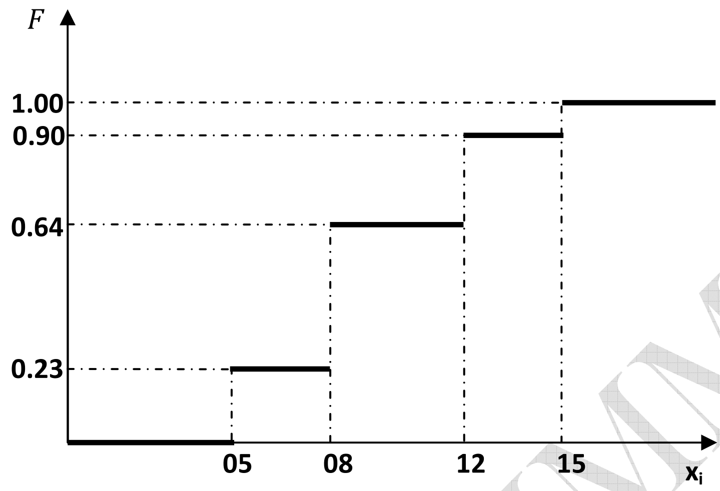
- $F(x)$ est définie sur $\Re$ et $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $F(x)$ est croissante sur $\Re$.
- F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \sum_{i=1}^{i=k-1} f_i & x \in [x_{k-1}, x_k[\quad k \geq 2 \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

Exemple : reprenons l'exemple des notes :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ 0.23 & 5 \leq x < 8 \\ 0.64 & 8 \leq x < 12 \\ 0.90 & 12 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

La courbe cumulative discrète (représentée ci-dessous) est toujours une courbe en escalier.

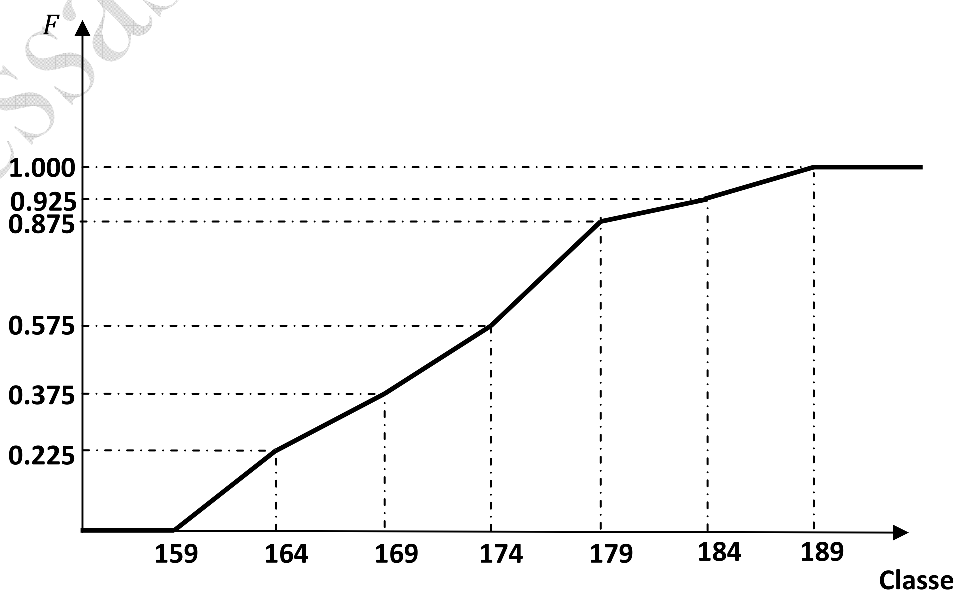


b) Cas continu

En reprenant l'exemple de la taille, la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 159 \\ 0.225 & x = 164 \\ 0.375 & x = 169 \\ 0.575 & x = 174 \\ 0.875 & x = 179 \\ 0.925 & x = 184 \\ 1 & x \geq 189 \end{cases}$$

La courbe cumulative continue (représentée ci-dessous) est une courbe continue.



4. Paramètres de position

a) **Le mode :** C'est la valeur de la variable qui a l'effectif le plus élevé.

b) **Classe modale :** C'est la classe ayant l'effectif le plus élevé si les classes ont la même amplitude. Sinon, c'est la classe ayant l'effectif corrigé le plus élevé.
L'amplitude de la classe $[\alpha_1, \alpha_2[$ est donnée par $a = \alpha_2 - \alpha_1$.

Exemples

Cas de l'égalité des amplitudes

Taille (cm)	< 160	$[160,170[$	$[\mathbf{170}, \mathbf{180}[$	$[180,190[$	≥ 190
effectif (n_i)	6	7	**8**	2	1
f_i (%)	25	29.1	**33.3**	8.3	4.3

Donc : $[170,180[$ est la classe modale

Cas de l'inégalité des amplitudes

Classe	Effectif (n_i)	f_i (%)	a_i	f_i/a_i	n_i/a_i
$[50,55[$	2	8.33	5	1.67	0.4
$[55,60[$	3	12.5	5	2.5	0.6
$[60,70[$	4	16.67	10	1.67	0.4
$[\mathbf{70}, \mathbf{75}[$	5	20.83	5	**4.17**	**1**
$[75,85[$	6	25	10	2.5	0.6
$[85,95[$	4	16.67	10	1.67	0.5

Donc : $[70,75[$ est la classe modale.

Calcul du mode

$$M_0 = L_{icmo} + A_{cmo} \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

L_{icmo} : est la borne inferieure de la classe modale.
A_{cmo} : est l'amplitude de la classe modale.
$\Delta_1 = f_{cmo} - f_{cmo-1}$: est la différence entre la fréquence de la classe modale et la fréquence de la classe précédente.

Δ_2: est la différence entre la fréquence de la classe modale et la fréquence de la classe suivante.

$$M_o = 70 + 5\frac{4.17 - 1.67}{(4.17 - 1.67) + (4.17 - 2.5)} = 72.9$$

$$M_0 = 70 + 5\frac{1 - 0.4}{(1 - 0.4) + (1 - 0.6)} = 73$$

c) La médiane (M_e) **:** C'est la valeur de la variable qui partage les observations en deux (02) parties égales ($F(M_e) = \frac{1}{2}$).

- ***Cas discret :*** Si les valeurs d'une série statistique sont ordonnées par ordre croissant ou décroissant, la médiane est la valeur qui se situe au centre de la série.

  - Si $n = 2k + 1$ (*n* est impair) alors $M_e = x_{k+1}$.

  Exemple : Si on a 15 valeurs ordonnées par ordre croissant :

  $$1, 2, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 12$$

  $n = 15 = 2 \cdot 7 + 1$ soit $k = 7$

  alors : $M_e = x_8 = 7$

  - Si $n = 2k$ (*n* est impair) alors $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

  Exemple : Si on a 10 valeurs ordonnées par ordre croissant :

  $$4, 5, 8, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19$$

  $n = 10 = 2 \cdot 5$ soit $k = 5$

  alors : $M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9+11}{2} = 10$

- ***Cas continu :*** La médiane est donnée par la formule suivante :

$$M_e = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot \frac{0.5 - F(C_1)}{F(C_2) - F(C_1)}$$

$$M_e \in [C_1, C_2[$$

$[C_1, C_2[$ est la classe médiane tel que $F(M_e) = 0.5$

d) La moyenne : La moyenne arithmétique notée $\bar{x}$ est donnée par :

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_i \cdot x_i & si\ \ X\ est\ discrète \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_i \cdot C_i & si\ \ X\ est\ continue \end{cases}$$

C_i est le centre de la classe tel que si l'on note C_1 le centre de la classe $[\alpha_1, \alpha_2[$ alors :

$$C_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

5. Paramètres de dispersion

a) Variance et écart type

- La variance notée $V(x)$ est donnée par :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} n_i \cdot (x - \bar{x})^2$$

Ou bien :

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} n_i \cdot x_i^2 - \bar{x}^2 & si \;\; X \; est \; discrète \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} n_i \cdot C_i^2 - \bar{x}^2 & si \;\; X \; est \; continue \end{cases}$$

- L'écart type noté σ_x est donné par :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

b) Les quantiles Q_i

- Ils sont déterminés de la même façon que la médiane.
- Les quantiles d'ordre $\frac{1}{4}$ (25%) et d'ordre $\frac{3}{4}$ (75%) sont dits les quartiles.
- Détermination dans le cas continu :

1er quartile :

$$Q_1 = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot \frac{0.25 - F(C_1)}{F(C_2) - F(C_1)}$$

$$F(Q_1) = 0.25$$

$$Q_1 \in [C_1, C_2[$$

3ème quartile :

$$Q_3 = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot \frac{0.75 - F(C_1)}{F(C_2) - F(C_1)}$$

$$F(Q_3) = 0.75$$

$$Q_3 \in [C_1, C_2[$$

Partie A : Statistiques

Chapitre II : Séries statistiques à deux variables

Distribution marginale, jointe et conditionnelle

Soient *X* et *Y* deux variables (quantitatives ou qualitatives) observées sur une population de taille *n*.

On cherche à mettre en évidence la relation entre *X* et *Y*.

Les données se présentent sous la forme suivante :

Individus : $1, 2, 3, \dots, i, \dots, n$

Valeurs de la variable X : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$

Valeurs de la variable Y : $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_n$

Comme pour le cas d'une variable simple, les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ (respectivement $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_n$) ne sont pas toutes différentes.

Notons $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_k$ les *k* valeurs définissant le caractère *X* et $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_p$ les *p* valeurs définissant le caractère *Y.*

1. Tableau de contingences

Les données du couple (X, Y) sont les couples (x_i, y_j) avec $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, p$.

On appelle $\boldsymbol{n_{ij}}$ l'***effectif joint*** du couple (x_i, y_j). Il représente le nombre d'individus ayant pour valeur x_i du caractère *X* et y_j du caractère *Y*. Il y'a $(k \times p)$ effectifs joints.

$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{j=p} n_{ij}$ représente le nombre d'individus ayant pris la valeur x_i. On l'appelle ***effectif marginal de la valeur*** $\boldsymbol{x_i}$.

$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{i=k} n_{ij}$ représente le nombre d'individus ayant pris la valeur y_j. On l'appelle ***effectif marginal de la valeur*** $\boldsymbol{y_j}$.

Les données se résument dans le tableau de contingence suivant :

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_p	$n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1p}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2j}	$\cdots$	n_{2p}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{ip}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\cdots$	n_{kj}	$\cdots$	n_{kp}	$n_{k\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot p}$	n

Remarque :

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{j=p} n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=p} n_{ij} = n$$

2. Distribution jointe

On appelle ***fréquence relative***, notée $\boldsymbol{f_{ij}}$, associée au couple (x_i, y_j) la proportion d'individus ayant pris la modalité x_i de *X* et la modalité y_j de *Y* simultanément.

On appelle ***distribution jointe*** du couple (X, Y) la donnée des couples (x_i, y_j), $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, p$.

<u>Remarque :</u>

$$\sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=p} f_{ij} = 1$$

3. Distribution marginale

On appelle ***fréquence marginale***, notée $\boldsymbol{f_{i\cdot}}$, du caractère *X* associée à la valeur x_i , la proportion d'individus ayant pris la modalité x_j de *X*.

On appelle ***fréquence marginale***, notée $\boldsymbol{f_{\cdot j}}$, du caractère *Y* associée à la valeur y_j , la proportion d'individus ayant pris la modalité y_j de *Y*.

$$f_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$$
$$f_{\cdot j} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$$

Le tableau de distribution marginale de X est comme suit :

X	$n_{i\cdot}$	$f_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$
x_1	$n_{1\cdot}$	$f_{1\cdot}$
x_2	$n_{2\cdot}$	$f_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$n_{i\cdot}$	$f_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$n_{k\cdot}$	$f_{k\cdot}$
Total	n	1

Le tableau de distribution marginale de Y est comme suit :

Y	$n_{\cdot j}$	$f_{i\cdot} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$
y_1	$n_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 1}$
y_2	$n_{\cdot 2}$	$f_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$n_{\cdot j}$	$f_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_p	$n_{\cdot p}$	$f_{\cdot p}$
Total	n	1

Remarque :

$$\sum_{i=1}^{i=k} f_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{j=p} f_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=p} f_{ij} = 1$$

Caractéristiques marginales :

- La moyenne marginale de x est : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} n_{i\cdot}\, x_i$
- La moyenne marginale de y est : $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=p} n_{\cdot j}\, y_j$
- La variance marginale de x est : $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} n_{i\cdot}\, x_i^2 - \bar{x}^2$
- La variance marginale de y est : $V(y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=p} n_{\cdot j}\, y_j^2 - \bar{y}^2$

4. Distribution conditionnelle

On peut considérer la distribution de X sur une partie de la population qui représente les modalités y_j de Y et inversement.

Les 2 distributions sont appelées ***distributions conditionnelles*** considérant la variable X liée par $Y = y_j$ qu'on note : $\boldsymbol{X/Y = y_j}$ et inversement $\boldsymbol{Y/X = x_i}$.

La variable $X/Y = y_j$ prend les modalités $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_k$

Il y'a p distributions conditionnelles de X/Y : $X/Y = y_1$; $X/Y = y_2$; … ; $X/Y = y_j$; … ; $X/Y = y_p$

Il y'a k distributions conditionnelles de Y/X : $Y/X = x_1$; $Y/X = x_2$; … ; $Y/X = x_i$; … ; $Y/X = x_k$.

$$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} \quad i = 1, \dots, k$$

$$f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \quad j = 1, \dots, p$$

La distribution conditionnelle de $X/Y = y_j$ est comme suit :

X	n_{ij}	$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}}$
x_1	n_{1j}	$f_{1/j}$
x_2	n_{2j}	$f_{2/j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{ij}	$f_{i/j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{kj}	$f_{k/j}$
Total	$n_{\cdot j}$	1

La distribution conditionnelle de $Y/X = x_i$ est comme suit :

Y	n_{ij}	$f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}}$
y_1	n_{i1}	$f_{1/i}$
y_2	n_{i2}	$f_{2/i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	n_{ij}	$f_{j/i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_p	n_{ip}	$f_{p/i}$
Total	$n_{i\cdot}$	1

Moyenne conditionnelle :

Moyenne conditionnelle de $Y/X = x_i$:

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{j=p} f_{j/i}\, y_j = \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{j=1}^{j=p} n_{ij}\, y_j$$

Moyenne conditionnelle de $X/Y = y_j$:

$$\bar{X}_j = \sum_{i=1}^{i=k} f_{i/j}\, x_i = \frac{1}{n_{\cdot j}} \sum_{i=1}^{i=k} n_{ij}\, x_i$$

Indépendance :

On dit que X et Y sont indépendants si :$f_{ij} = f_{i\cdot} \times f_{\cdot j} \quad \forall\, i, \forall\, j$

Si X et Y sont indépendants :

- $f_{i/j} = f_{i\cdot} \qquad \forall\, i, \forall\, j$
- $f_{j/i} = f_{\cdot j} \qquad \forall\, i, \forall\, j$

Partie B : Probabilités

Chapitre I : Analyse Combinatoire

I. Généralités

1. Eléments discernables et éléments indiscernables d'un ensemble

Soit E un ensemble fini ayant n éléments.

Définitions :

- Si e_1 et e_2, deux éléments de *E*, sont équivalents (ou jouent le même rôle), on dira qu'ils sont ***indiscernables***. On les notera par la même lettre.
- Si e_1 et e_2, ne sont pas équivalents, on dira qu'ils sont ***discernables***. On les notera par deux lettres différentes.
- L'ensemble *E* peut être constitué d'éléments :
  - tous discernables deux à deux : $E = (a, b, c, \dots, s)$.
  - tous indiscernables deux à deux : $E = (a, a, a, \dots, a)$.
  - discernables deux à deux pour certains et indiscernables deux à deux pour d'autres :
$$E = \{(a, a, \dots, a), (b, b, \dots, b), \dots (s, s, \dots, s)\}.$$
- On dit que α est le nombre de répétition des éléments du type a (l'élément a est répété α fois).

2. Dispositions formées à l'aide d'éléments d'un ensemble

Définition : Une disposition est formée d'éléments choisis par les *n* éléments de l'ensemble *E*. Par conséquent, un élément d'une disposition est caractérisé par :

- Le nombre de fois où il figure (la répétition).
- Sa place dans la disposition (l'ordre).

Considérons une famille de dispositions.

- Si un élément donné, *a* par exemple, ne peut figurer que 0 ou 1 fois dans chaque disposition, on dira que les dispositions sont ***sans répétition.***
- Si un élément peut figurer plus d'une fois dans certaines dispositions de la famille, on dira que ces dispositions sont ***avec répétition***.
- Si les éléments qui figurent dans une disposition donnée jouent le même rôle, on dira que la disposition n'***est pas ordonnée***.
- Si les éléments qui figurent dans une disposition donnée ne jouent pas le même rôle, on dira que la disposition est ***ordonnée***.

II. Arrangement

Soit *E* un ensemble de *n* éléments discernables $(a, b, c, \dots, s)$.

1. Arrangement avec répétition

On appelle ***arrangement avec répétition*** de p éléments choisis parmi les n éléments, une disposition ordonnée avec répétition de p éléments choisis parmi n.

Le nombre d'arrangement avec répétition est : $a_n^p = n^p$.

Exemple : $n = 3$, $p = 2$, $E = \{a, b, c\}$

Les arrangements avec répétition de deux éléments sont :

$$(a, a)\ , (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$$

Au total, il y'en a 09.

2. Arrangement sans répétition

On appelle ***arrangement sans répétition*** de p éléments choisis parmi les n éléments, une disposition ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble.

Le nombre d'arrangement sans répétition est : A_n^p.

Exemple : $n = 3$, $p = 2$, $E = \{a, b, c\}$

Les arrangements sans répétition de deux éléments sont :

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$$

Au total, il y'en a 06.

Remarques

- Dans un arrangement sans répétition les p éléments sont tous distincts les uns des autres dans un ordre déterminé : $1 \leq p \leq n$.
- L'ensemble des arrangements sans répétition est inclus dans l'ensemble des arrangements avec répétition : $A_n^p \leq a_n^p$

Calcul de A_n^p

La construction d'un arrangement de p éléments est une procédure O que l'on peut décomposer en p procédures élémentaires $O_1, O_2, \dots, O_p$ ordonnées :

O_1 : Choix du 1er symbole qui comporte $\alpha = n$ modalités.

O_2 : Choix du 2ème symbole qui comporte $\beta = n - 1$ modalités.

O_1 : Choix du 3ème symbole qui comporte $\gamma = n - 2$ modalités.

.

.

.

O_p : Choix du p^{ème} symbole qui comporte $\delta = n - p + 1$ modalités.

Le principe tiroir $\Rightarrow$ Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi les n n éléments est donc $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$

En utilisant la notation factorielle, on a :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : Le nombre de tiercés dans une course de 10 chevaux est : $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

III. Permutation

1. Permutation sans répétition

Soit *E* un ensemble de *n* éléments discernables $(a, b, c, \dots, s)$.

On appelle ***permutation sans répétition*** des n éléments de *E*, une disposition ordonnée de ces n éléments. Dans une permutation, chaque élément de *E* figure une seule fois dans un ordre déterminé.

Calcul du nombre de permutations

Une permutation est un arrangement sans répétition de *n* éléments choisis parmi *n* éléments.

$$P_n = A_n^n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Exemple : 10 invités doivent participer à un repas. De combiens de façons différentes peut-on les placer autour d'une table :

-si la table est en forme de U (Rép = 10 !)

-si la table est ronde (Rép = 9 !)

2. Permutation avec répétition

Soit l'ensemble $E = \{(a, a, \dots, a), (b, b, \dots, b), \dots (s, s, \dots, s)\}$ qui contient les groupes discernables d'éléments indiscernables.

On appelle ***permutation avec répétition*** des n éléments de *E*, toute disposition ordonnée de ces n éléments. Dans chaque permutation avec répétition, la lettre *a* figure α_1 fois, la lettre *b* figure α_2 fois, … la lettre *s* figure α_k fois. Tout ceci suivant un ordre déterminé.

$$P_k = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \alpha_k!}$$

Exemple : Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres à l'aide des chiffres 2, 2, 3, 4, 4 ?

Un nombre de 05 chiffres peut être considéré comme une permutation avec répétition de 5 chiffres de l'ensemble $E = \{(2,2), (3), (4,4)\}$.

Il y'a $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = 30$ nombres possibles.

IV. Combinaison

Soit *E* un ensemble de *n* éléments discernables $(a, b, c, \dots, s)$.

On appelle ***combinaison*** de p éléments choisis parmi les n éléments de *E*, une disposition non ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi les n éléments.

On note : C_n^p

Ainsi, pour $n = 3$ et $p = 2$ $E = (a, b, c)$, le nombre de combinaisons possible est de trois : $\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$

Dans chaque combinaison, il y'a p éléments tous distincts (différents).

Par conséquent on a : $1 \leq p \leq n$.

Calcul de C_n^p

A partir d'une combinaison donnée, on peut engendrer des arrangements sans répétition par permutation des lettres qui y figurent.

Exemple :

Pour $p = 1$, $(a, c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} (a, c, d) \\ (a, d, c) \\ (c, a, d) \\ (c, d, a) \\ (d, a, c) \\ d, c, a) \end{cases}$ il y'a $3! = 6$ permutations

D'une façon générale, chacune des C_n^p combinaisons permet d'engendrer $p! \cdot C_n^p = A_n^p \Rightarrow C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Ainsi :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Propriétés :

- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
- $(a + b)^n = \sum_{p=1}^n C_n^p \cdot a^p \cdot b^{n-p}$

Partie B : Probabilités

Chapitre II : Eléments de Probabilité

I. Définitions

1. Expérience aléatoire

On appelle épreuve aléatoire toute expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

Exemple :

Lorsqu'on jette un dé équilibré, on ne peut pas prévoir le chiffre qui va apparaitre sur la face supérieure du dé. Par conte, ce chiffre appartient nécessairement à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Espace fondamental

L'espace fondamental, noté Ω, est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.

Exemple :

Pour le lancé d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Pour le lancé de deux dés $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

3. Evénement

Un événement est une partie de l'espace fondamental Ω.

4. Réalisation d'événement

On dit qu'un événement *A* est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à *A*.

Exemple :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : « Avoir un chiffre pair » $\Omega = \{2, 4, 6\}$

Si le résultat de l'expérience est 2 ($2 \in A$) alors *A* est réalisé.

Remarques :

- Soient *A* et *B* deux événements du même espace Ω.
  - $A \cap B$: signifie que *A* et *B* se réalisent simultanément.
  - $A \cup B$: signifie qu'au moins un des deux événements se réalise.
  - A^C ou $\bar{A}$: signifie que l'événement *A* ne se réalise pas.
  - $\emptyset$: événement impossible.
  - Ω : événement sur ou certain (car il est toujours réalisé).
- Un événement est dit élémentaire si c'est un singleton de Ω.

5. Tribu

Soit Ω un espace fondamental. On appelle ***tribu*** sur Ω une classe de parties de Ω, notée $\mathcal{A}$, qui vérifie :

- $\Omega. \in \mathcal{A}$
- $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \mathrm{A}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$
- $\forall (A_i, i \geq 1)$ une suite infinie dénombrable de *A,* alors : $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemples :

- $\mathcal{A} = (\Omega, \emptyset)$
- $\mathcal{A} = (\Omega, \emptyset, A, A^C) \quad A \in \Omega$
- $\Omega = (e_1, e_2, \dots, e_n) \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

6. Espace probabilisable

Un espace probabilisable est le couple dont la 1ère composante est Ω et la 2ème est une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

7. Evénement 2 à 2 disjoints

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits 2 à 2 disjoints (ou mutuellement exclusifs ou incompatibles) si :

$$\forall\, i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

II. Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et *P* une application de $\mathcal{A}$ dans $\Re$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \Re \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

L'application *P* est dite ***Probabilité*** si :

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall\, (A_i, i \geq 1)$ infinie dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

Propriétés

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{A}$
- $P(A^C) = 1 - P(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Exemple 1 : Propriété uniforme

Soit une expérience aléatoire d'espace fondamental Ω où :

$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Soit *P* une probabilité sur $\mathcal{A}$ définie par :

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

Alors : $\forall\, A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles à la réalisation de } \Omega}$$

<u>Exemple 2 :</u>

On lance deux (2) dés bien équilibrés. Calculons la probabilité pour que la somme des résultats obtenus soit supérieure ou égale à 4.

$\Omega = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y})/\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P\big((x, y)\big) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad \forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}).$

<u>Exemple 3 :</u>

Soit une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules noires. On prélève deux boules sans remise de l'urne. Calculons la probabilité pour que les deux boules soient de couleurs différentes.

- Si les boules sont prélevées simultanément :

$\Omega = \{(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)/\mathrm{b}_1 \neq \mathrm{b}_2,\ \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2 \in \text{urne}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$|\Omega| = C_8^2 = 28$ et $P((\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{28} \quad \forall(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$

A l'événement : « les 2 boules sont de couleurs différentes »

$$P(\mathrm{A}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{28}$$

- Si les boules sont prélevées successivement :

$$|\Omega| = A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 8x7 = 56$$

$$P((\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{56} \quad \forall(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$$

$$P(\mathrm{A}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_5^1 \cdot A_3^1 \cdot 2}{56}$$

<u>Remarque :</u> Du point de vue probabilité, faire des tirages successifs ou un tirage simultané des boules est exactement la même chose.

1. Système complet d'événement

Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un système complet pour Ω si :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\ ,\ A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall\, i \neq j$$

2. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé et *P* une probabilité sur $\mathcal{A}$. Soient *A* et *B* deux événements tels que $P(\mathrm{B}) > 0$. On appelle ***probabilité conditionnelle*** de *A* sachant que *B* est réalisé, la probabilité notée $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$ définie par :

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$$

<u>Exemple 1:</u>

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On prélève 2 boules sans remise successivement de l'urne sachant que la première boule est blanche. Calculons la probabilité que la seconde boule soit rouge.

Exemple 2 :

Deux machines produisent respectivement 70% et 30% d'une certaine pièce. La proportion de pièces défectueuses sont respectivement 4% pour la première machine et de 3% pour la deuxième. On prélève au hasard une pièce de la production.
Quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

3. Formule de Bayes

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements de Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$.
Soit $A \in \mathcal{A}$ alors $P(A_i) > 0 \;\forall i\; P(\mathrm{A}) > 0$
On a :

$$P(\mathrm{A_j}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A}/\mathrm{A_j})}{\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}/\mathrm{A_i}) \cdot P(A_i)} \quad \forall j$$

Exemple 1 :

A un carrefour se trouvent trois personnes P_1, P_2 et P_3 .
P_1 dit la vérité 1 fois sur dix.
P_2 dit la vérité 5 fois sur dix.
P_3 dit la vérité 9 fois sur dix.
Un voyageur arrive au carrefour et demande à l'une des trois personnes une certaine direction. Il prend la direction indiquée, et s'aperçoit à la fin qu'il a pris la bonne direction.
Calculons la probabilité qu'il se soit adressé à la deuxième personne.

Exemple 2 :

A l'université de T.O, il y'a deux fois plus de filles que de garçons. Les probabilités de réussite est de 60% pour les filles et de 35% pour les garçons. On prend un étudiant au hasard, et on s'aperçoit qu'il est admis.
Calculons la probabilité qu'il soit un garçon.

4. Indépendance d'événements :

Soient A et B deux événements d'une tribu $\mathcal{A}$ et P une probabilité sur $\mathcal{A}$. On dira que les événements A et B sont indépendant par rapport à P si $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemple 1:

On lance deux dés et on considère les événements suivants :
A_1 : le résultat du premier dé est pair.
A_2 : le résultat du second dé est impair.
A_3 : les résultats sont de même parité.
Les événements A_1, A_2, et A_3 sont-ils deux à deux indépendant par rapport à P .

Remarque :

Si A et B sont indépendants, il en est de même pour :
1) A et B^C ; 2) A^C et B ; 3) A^C et B^C.

5. Indépendance mutuelle

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants si :

- $P(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{A_j}) = P(\mathrm{A_i}) \cdot P(\mathrm{A_j}) \quad \forall\, i \neq j$
- $P(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{A_j} \cap \mathrm{A_k}) = P(\mathrm{A_i}) \cdot P(\mathrm{A_j}) \cdot P(\mathrm{A_k}) \quad \forall\, i \neq j \neq k$
- $P(\bigcap_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} P(\mathrm{A_i})$

Remarque :

Si les événements sont indépendants 2 à 2, ils ne sont pas forcement mutuellement indépendants.

Exemple :

Lancer de 2 dés.

A_1 : le résultat du premier dé est pair.

A_2 : le résultat du second dé est impair.

A_3 : les résultats sont de même parité.

Les événements A_1, A_2, et A_3, sont-ils mutuellement indépendant par rapport à P .