Faculté de Génie de La Construction
Département de Génie Civil
Semestre 3
Probabilités & Statistiques
Sections : A,B & Hydraulique

Mars 2020

Corrigé de la série 2

Exercice1

$X \backslash Y$	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$
0	2	0	3	0
1	0	1	2	3
2	0	0	1	1
3	4	3	0	0
4	1	0	4	0

1) Distribution marginale de X

x_i	$n_{i\,.}$	$n_{i\,.}\,x_i$	$n_{i\,.}\,x_i^2$
0	5	0	0
1	6	6	6
2	2	4	8
3	7	21	63
4	5	20	80
total	25	51	157

Distribution marginale de Y

y_j	$n_{.\,j}$	c_j	$n_{.\,j}\,c_j$	$n_{.\,j}\,c_j^2$
$[0,5[$	7	2,5	17,5	43,75
$[5,10[$	4	7,5	30	225
$[10,15[$	10	12,5	125	1562,5
$[15,20[$	4	17,5	70	1225
total	25		242,5	3056,25

2) Dire que $X = 2$ revient à dire que X_i est X_3.

D'après la question 1), on a :

$$n_{3\,.} = 2, \qquad n_{31} = 0, \qquad n_{32} = 0, \qquad n_{33} = 1, \qquad n_{34} = 1$$

La distribution conditionnelle de y/x est donnée par la formule :

$$f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\,.}}$$

On a donc :

$$f_{\frac{1}{3}} = \frac{n_{31}}{n_{3.}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f_{\frac{2}{3}} = \frac{n_{32}}{n_{3\,.}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f_{\frac{3}{3}} = \frac{n_{33}}{n_{3.}} = \frac{1}{2}$$

$$f_{4/3} = \frac{n_{34}}{n_{3\,.}} = \frac{1}{2}$$

3) On dit que X et y sont indépendantes si :

$$f_{ij} = f_{i.}\, f_{.j} \qquad \forall\, i \quad et \quad \forall\, j$$

On a :

$$f_{11} = \frac{n_{11}}{n} = \frac{2}{25}\ ;\ f_{1.} = \frac{n_{1\,.}}{n} = \frac{5}{25}\ \ et\ \ f_{.1} = \frac{n_{.1}}{n} = \frac{7}{25}$$

On constate que $f_{11} \neq f_{1\,.}\ f_{.\,1}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes

4) $\bar{x} = \frac{\sum n_{i.} x_i}{n} = \frac{51}{25} = 2{,}04, \qquad v(x) = \frac{\sum n_{i.} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{157}{25} - (2{,}04)^2 = 2{,}12$
d'où : $\sigma_x = 1{,}45.$
$\bar{y} = \frac{\sum n_{.j} c_j}{n} = \frac{242{,}5}{25} = 9{,}7, \qquad v(y) = \frac{\sum n_{.j} c_j^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{3056{,}25}{25} - (9{,}7)^2 = 28{,}16$
d'où : $\sigma_y = 5{,}30.$

$$\begin{aligned} cov(x,y) &= \frac{1}{n}\Big(\sum\sum n_{ij}\, x_i\, c_j\Big) - \bar{x}\bar{y} \\ &= \frac{1}{25}(7{,}5 + 25 + 52{,}5 + 25 + 35 + 30 + 67{,}5 + 10 + 200\,) \\ &- ((2{,}04)(9{,}7)) = -1{,}688 \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation est donc :

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1{,}688}{(1{,}45)(5{,}30)} = -0{,}219 \approx 0$$

Les variables X et Y sont donc faiblement corrélées.

5) Droite de régression de Y en X :

$$y = ax + b$$

avec :

$$\begin{cases} a = \dfrac{cov(x,y)}{v(x)} = -0{,}796 \\ b = \bar{y} - a\bar{x} = 11{,}32 \end{cases}$$

d'où :

$$y = -0{,}796\, x + 11{,}32$$

Droite de régression de X en Y :

$$x = a' y + b'$$

Avec :

$$\begin{cases} a' = \dfrac{cov(x,y)}{v(y)} = -0{,}06 \\ b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 2{,}622 \end{cases}$$

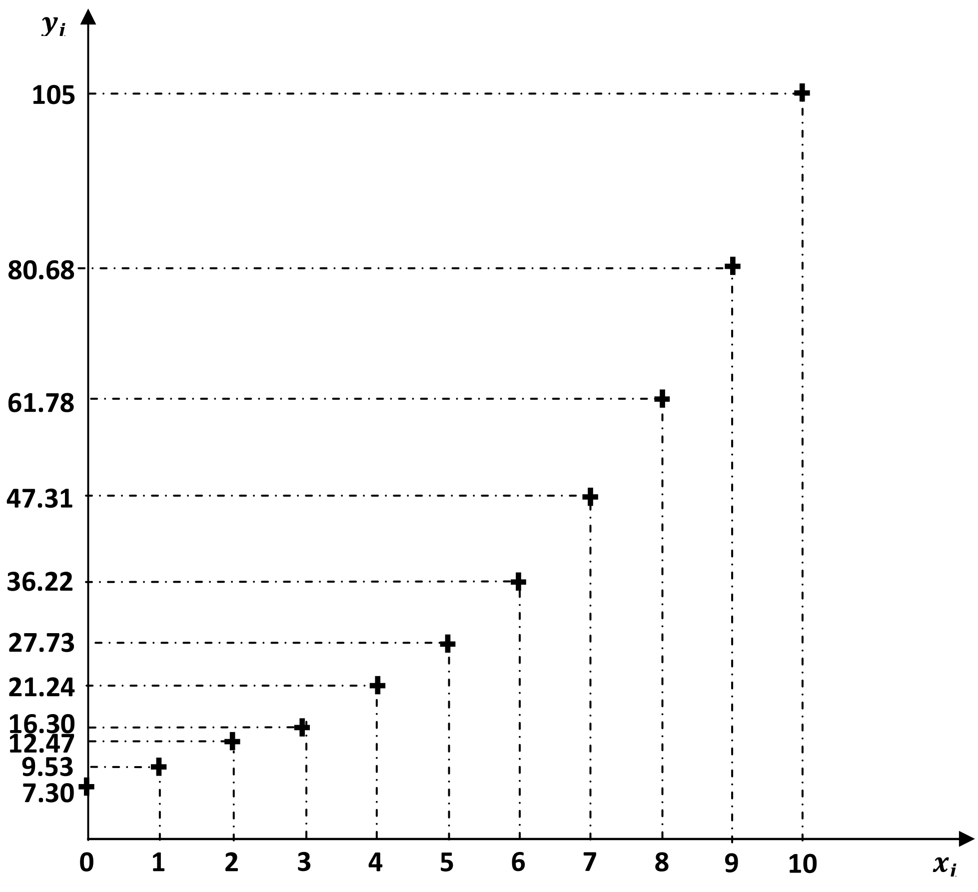
d'où :

$$x = -0{,}06\, y + 2{,}622$$

Exercice2 :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7,3	9,53	12,47	16,3	21,24	27,73	36,22	47,31	61,78	80,68	105

1) Nuage des points (x_i, y_i)



2) Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{11}(0+1+2+3+4+5+6+7\,8+9+10) = \frac{1}{11}(55) = 5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{11}(7{,}3+9{,}53+12{,}47+16{,}3+21{,}24+27{,}73+36{,}22+47{,}31+61{,}78 + 80{,}68+105) = \frac{1}{11}(425{,}56) = 38{,}69$$

Variances :

$$V(x) = \frac{1}{11}\sum x_i^2 \quad - \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{11}(385) - 25 = 10 \qquad \Rightarrow \sigma_x = 3{,}162$$

$$V(y) \; = \; \frac{1}{11}\sum y_i^2 \; - \; \bar{y}^2$$
$$= \; \frac{1}{11}(53{,}29 + 90{,}821 + 155{,}501 + 265{,}69 + 451{,}138$$
$$+ 768{,}953 + 1311{,}888 + 2238{,}236 + 3816{,}768$$
$$+ 6509{,}262 + 11025) \; - \; 1496{,}916 \; = \; 929{,}134 \qquad \Rightarrow \sigma_y$$
$$= \; 30{,}482$$

Covariances :

$$Cov(x,y) \; = \; \frac{1}{11}\sum x_i y_i \quad - \bar{x}\bar{y}$$
$$= \; \frac{1}{11} \; (9{,}53 \; + 24{,}94 \; + 48{,}9 \; + 84{,}56 \; + 138{,}65 \; + 217{,}32$$
$$+ \; 331{,}17 \; + \; 494{,}24 \; + 726{,}12 \; + \; 105) \; - \; 193{,}54$$
$$= \; 90{,}63$$

Coefficient de corrélation :

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{90{,}63}{96{,}38} = 0{,}94 \approx 1$$

x et y sont donc fortement corrélées

3.) Droites de régression :

$$y = a\,x + b$$
$$x = a'y \; + b'$$

avec :

$$\begin{cases} a = \quad \dfrac{cov(x,y)}{v(x)} \quad = 9{,}063 \\ b = \quad \bar{y} - a\bar{x} \quad = -6{,}625 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = \quad \dfrac{cov(x,y)}{v(y)} \quad = 0{,}097 \\ b' = \quad \bar{x} - a'\bar{y} \quad = 1{,}25 \end{cases}$$

d'où :

$$y = \; 9{,}063\,x - 6{,}625$$
$$x = 0{,}097\,y + 1{,}25$$