



Solution exercices N°1 et N°2

Exercice n°1 :

(1) Calcul de la force de précontrainte pour annulé la traction en fibre inférieure

Les contraintes normales sur les fibres extrêmes de la section dues au moment extérieur :

$$\begin{cases} \sigma_{sex} = +\frac{M}{I} \cdot v = 9,681 \text{ MPa} \\ \sigma_{iex} = -\frac{M}{I} \cdot v' = -9,681 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{. N.B : } v=v'=h/2 \text{ ; } h : \text{ hauteur de la section.}$$

1^{er} cas : Précontrainte centrée :

Les contraintes dues à la précontrainte centrée sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{sp} = \frac{F_c}{B} \\ \sigma_{ip} = \frac{F_c}{B} \end{cases}$$

Les contraintes résultantes sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_s = +\frac{M}{I} \cdot v + \frac{F_c}{B} \\ \sigma_i = -\frac{M}{I} \cdot v' + \frac{F_c}{B} \end{cases}$$

Pas de contrainte de traction en fibre inférieure se traduit par : $\sigma_i = \sigma_{iex} + \sigma_{ip} \geq 0$

$$\Rightarrow -\frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} + \frac{F_c}{B} \geq 0 \Rightarrow F_c = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} \cdot B \Rightarrow F_c \geq \frac{41 \cdot 10^3}{0,0847 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{400}{2} \cdot 46400 = 449,208 \text{ Kn}$$

$$\Rightarrow F_c = 0,450 \text{ Mn}$$

2^{ème} cas : Précontrainte excentrée :

Précontrainte excentrée seule :

$$\begin{cases} \sigma_{sp} = \frac{F_e}{B} - \frac{(F_e \times e)}{I} \cdot v = F_e \left(\frac{1}{B} - \frac{e}{I} \cdot \frac{h}{2} \right) \\ \sigma_{ip} = \frac{F_e}{B} + \frac{(F_e \times e)}{I} \cdot v' = F_e \left(\frac{1}{B} + \frac{e}{I} \cdot \frac{h}{2} \right) \end{cases}$$

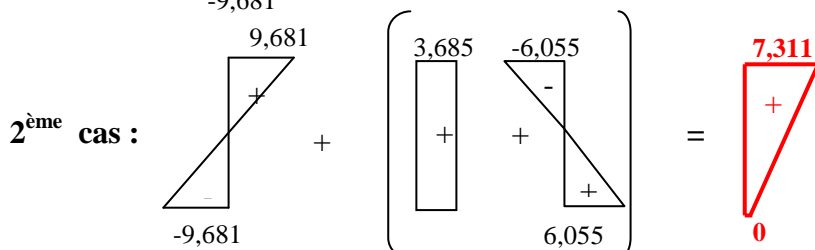
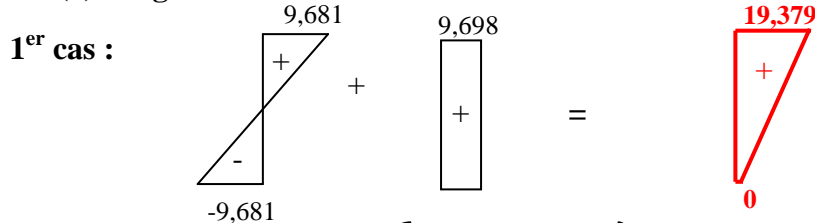
Les contraintes résultantes sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_s = +\frac{M}{I} \cdot v + F_e \left(\frac{1}{B} - \frac{e}{I} \cdot \frac{h}{2} \right) \\ \sigma_i = -\frac{M}{I} \cdot v' + F_e \left(\frac{1}{B} + \frac{e}{I} \cdot \frac{h}{2} \right) \end{cases}$$

Pas de contrainte de traction en fibre inférieure se traduit par : $\sigma_i = \sigma_{iex} + \sigma_{ip} \geq 0$

$$-\frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} + F_e \left(\frac{1}{B} + \frac{e}{I} \cdot \frac{h}{2} \right) \geq 0 ; \Rightarrow F_e = 170,4 \text{ Kn ; } F_e = 0,171 \text{ Mn}$$

(2) Diagrammes de contraintes résultantes :



(3) Comparaison des deux cas et Conclusion :

- La précontrainte centrée est supérieure à la précontrainte excentrée.
- La contrainte de compression (sur la fibre supérieure) est plus grande dans le cas la précontrainte centrée (double de la contrainte initiale).

La précontrainte excentrée permet donc de faire une économie substantielle de béton et d'acier par rapport à la précontrainte centrée.

Exercice n° 2 :

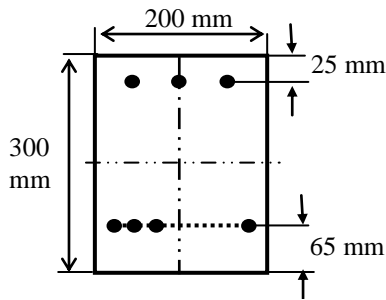


Figure 1 : Section transversale.

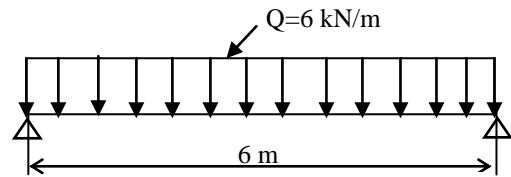
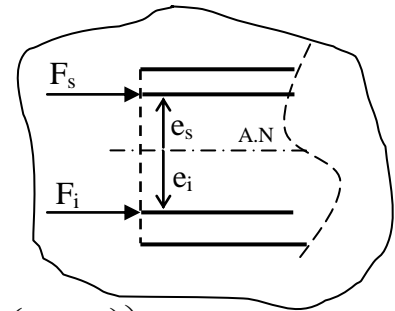


Figure 2 : Schéma statique.



- Aire de la section : $B = 200 \times 300 = 6.10^4 \text{ mm}^2$
- Moment d'inertie : $I = \frac{b.h^3}{12} = \frac{200 \times 300^3}{12} = 45.10^7 \text{ mm}^4$
- Poids propre : $G = \varpi.B = 25 \times 6.10^4.10^{-6} = 1,5 \text{ Kn/m}$
(ϖ : masse volumique du béton prise égale à 25 Kn/m^3).
- Force de précontrainte (fibre supérieure) : $F_s = 850 \times \left(3 \times \left(\frac{\pi \times 5^2}{4} \right) \right) = 50043,75 \text{ N}$
- Force de précontrainte (fibre inférieure) : $F_i = 850 \times \left(15 \times \left(\frac{\pi \times 5^2}{4} \right) \right) = 250218,75 \text{ N}$

(1) Contraintes aux fibres extrêmes de la section médiane

➤ Les moments fléchissant à mi travée sont calculés comme suit :

- Moment du au poids propre : $M_g = \frac{G \times L^2}{8} = \frac{1,50 \times 6^2}{8} = 6,75 \text{ kN.m}$
- Moment du à la surcharge Q : $M_q = \frac{Q \times L^2}{8} = \frac{6 \times 6^2}{8} = 27,00 \text{ kN.m}$

➤ Calcul des contraintes :

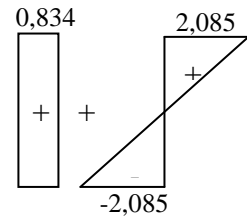
$$\text{Contraintes dues au poids propre : } \begin{cases} \sigma_{sg} = + \frac{6 \times M_g}{b \times h^2} = \frac{6 \times 6,75 \times 10^{-3}}{0,2 \times 0,3^2} = 2,25 \text{ MPa} \\ \sigma_{ig} = - \frac{6 \times M_g}{b \times h^2} = - \frac{6 \times 6,75 \times 10^{-3}}{0,2 \times 0,3^2} = -2,25 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{Contraintes dues à la surcharge Q : } \begin{cases} \sigma_{sq} = + \frac{6 \times M_q}{b \times h^2} = \frac{6 \times 27 \times 10^{-3}}{0,2 \times 0,3^2} = 9 \text{ MPa} \\ \sigma_{iq} = - \frac{6 \times M_q}{b \times h^2} = - \frac{6 \times 27 \times 10^{-3}}{0,2 \times 0,3^2} = -9 \text{ MPa} \end{cases}$$



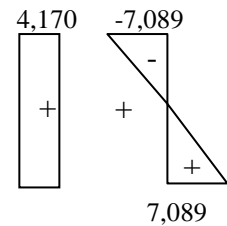
Contraintes dues à la précontrainte supérieure :

$$\begin{cases} \sigma_{sp} = \frac{F_s}{B} + \frac{6 \times (F_s \times e_s)}{b \times h^2} = \frac{50043,75}{6.10^4} + \frac{6 \times 50043,75 \times 125}{200 \times 300^2} = 2,919 \text{ MPa} \\ \sigma_{ip} = \frac{F_s}{B} - \frac{6 \times (F_s \times e_s)}{b \times h^2} = \frac{50043,75}{6.10^4} - \frac{6 \times 50043,75 \times 125}{200 \times 300^2} = -1,251 \text{ MPa} \end{cases}$$



Contraintes dues à la précontrainte inférieure :

$$\begin{cases} \sigma_{sp} = \frac{F_i}{B} - \frac{6 \times (F_i \times e_i)}{b \times h^2} = \frac{250218,75}{6.10^4} - \frac{6 \times 250218,75 \times 85}{200 \times 300^2} = -2,919 \text{ MPa} \\ \sigma_{ip} = \frac{F_i}{B} + \frac{6 \times (F_i \times e_i)}{b \times h^2} = \frac{250218,75}{6.10^4} + \frac{6 \times 250218,75 \times 85}{200 \times 300^2} = 11,259 \text{ MPa} \end{cases}$$



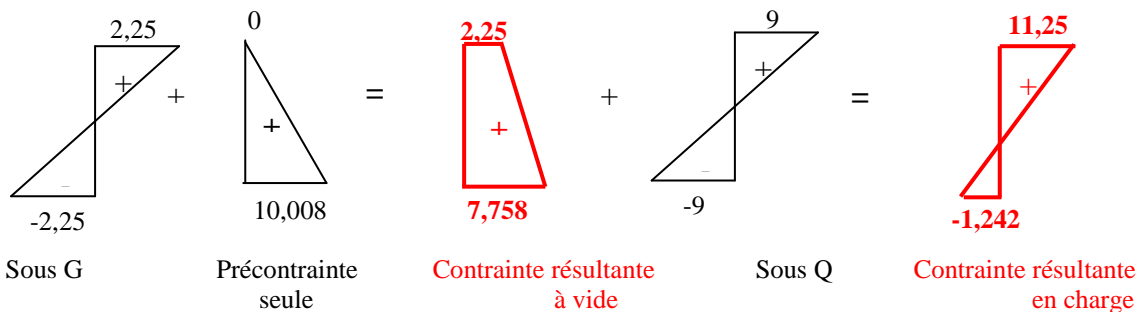
Contraintes résultantes dues à la précontrainte

$$\begin{cases} \sigma_{sp} = 2,919 - 2,919 = 0 \\ \sigma_{ip} = -1,251 + 11,259 = 10,008 \text{ MPa} \end{cases}$$

➤ Les Contraintes résultantes à vide et en charge sont donc :

À vide sous (G+P): $\begin{cases} \sigma_s = \sigma_{sg} + \sigma_{sp} = 2,25 + 0 = 2,25 \text{ MPa} \\ \sigma_i = \sigma_{ig} + \sigma_{ip} = -2,25 + 10,008 = 7,758 \text{ MPa} \end{cases}$

En charge (G+P+Q) : $\begin{cases} \sigma_s = \sigma_{sg} + \sigma_{sp} + \sigma_{sq} = 2,25 + 9 = 11,25 \text{ MPa} \\ \sigma_i = \sigma_{ig} + \sigma_{ip} + \sigma_{iq} = 7,758 - 9 = -1,242 \text{ MPa} \end{cases}$



(2) vérification des contraintes :

À vide : $\begin{cases} \sigma_s = \sigma_{sg} + \sigma_{sp} = 2,25 + 0 = 2,25 \text{ MPa} \geq 0 ? & \text{vérifiée} \\ \sigma_i = \sigma_{ig} + \sigma_{ip} = -2,25 + 10,008 = 7,758 \text{ MPa} \leq \sigma'_b = 15 \text{ MPa} ? & \text{vérifiée} \end{cases}$

En charge : $\begin{cases} \sigma_s = \sigma_{sg} + \sigma_{sp} + \sigma_{sq} = 2,25 + 9 = 11,25 \text{ MPa} \leq \sigma'_b = 15 \text{ MPa} ? & \text{vérifiée} \\ \sigma_i = \sigma_{ig} + \sigma_{ip} + \sigma_{iq} = 7,758 - 9 = -1,242 \text{ MPa} \geq 0 ? & \text{Non vérifiée} \end{cases}$