CHAPITRE 3

Cycles Idéaux des Moteurs à combustion interne

Fonctionnement général

Les moteurs à combustion interne sont des machines volumétriques dans lesquelles on réalise de façon cyclique une série de transformations physico-chimiques qui opèrent sur un système principalement en phase gazeuse et se traduisent globalement par la production d'un travail sur l'organe moteur. Celui-ci est un piston qui effectue dans un cylindre un mouvement alternatif dont la cinématique est imposée par le système bielle - manivelle auquel il est lié (figure 1). Les positions extrêmes que peut atteindre le piston sont le point mort bas PMB et le point mort haut PMH.

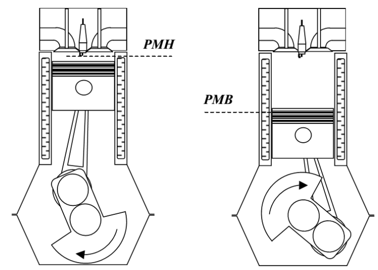


Figure 1

Le cylindre est fermé à sa partie supérieure par un couvercle appelé culasse. Celle-ci porte l'élément destiné à provoquer la combustion au sein de la charge que contient le cylindre. Selon le cas, cette charge est constituée :

- d'un mélange gazeux d'air et de carburant léger, que l'on enflamme au moment voulu par l'étincelle électrique d'une bougie (fig. 1.2 a). Le moteur est alors appelé à allumage commandé ou à allumage par étincelle, ou encore moteur Otto, du nom de Nikolaus Otto qui en a développé la version à quatre temps. Le carburant léger utilisé peut être un gaz ou un liquide volatil. Ainsi, le gaz de ville fut utilisé par Etienne Lenoir pour faire tourner le premier moteur "à explosion" breveté en 1860, alors que Carl Benz développait en 1886 la première voiture automobile propulsée par un moteur à essence de pétrole.
- d'une dispersion de carburant lourd injecté dans l'air porté par compression à une température suffisante pour provoquer l'inflammation spontanée du mélange. La dispersion du carburant au moment souhaité pour l'allumage est assurée par un injecteur (fig. 1.2 b), et le moteur est alors appelé à allumage spontané ou à allumage par compression, ou encore moteur Diesel, inventé en 1897 par Rudolf Diesel

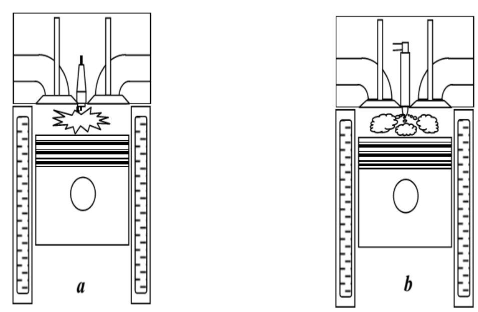


Figure 2

Les phases fonctionnelles qui conduisent à la production d'un travail moteur sur le piston sont :

• la phase motrice, constituée de la séquence compression-combustion-détente. Cette phase a lieu dans l'enceinte du cylindre étanche au monde extérieur. Elle comporte toujours une course PMB-PMH du piston pour la compression, une phase de combustion effectuée lorsque le piston est proche du point mort haut PMH et une course PMH-PMB pour la détente de la charge enfermée dans le cylindre (figure 3).

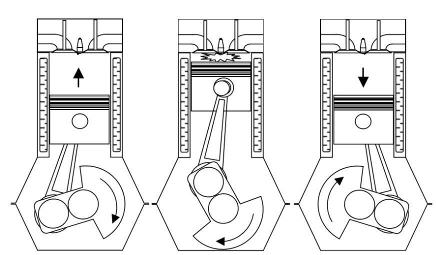


Figure 3

La dilatation thermique du gaz due à la combustion intervenant entre compression et détente se manifeste par une hausse de pression à la position PMH du piston lorsque la combustion est assez rapide, ou par la persistance de valeurs élevées de la pression pendant le début de la course de détente lorsque la combustion est étalée dans le temps.
Dans l'un et l'autre cas, pour toute position du piston, la pression durant la course de détente est supérieure à celle relative à la course de compression. Le travail développé sur le piston durant la détente est ainsi supérieur à celui développé par le piston durant la course de compression, ce qui confère au système sa caractéristique d'installation motrice.

- la phase de respiration, qui consiste à admettre une charge fraîche d'air ou de mélange d'air et de carburant au début du cycle opératoire, et à évacuer les produits de la combustion en fin de cycle opératoire. On distingue à ce niveau deux types de moteurs :
- les moteurs à quatre temps (figure 4), dont la respiration s'opère par ouverture adéquate de deux soupapes ou deux ensembles de soupapes, servant respectivement à l'évacuation des gaz brûlés (soupape(s) d'échappement) et au remplissage en charge fraîche (soupape(s) d'admission)

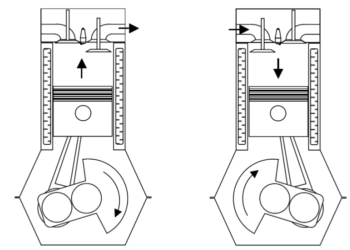
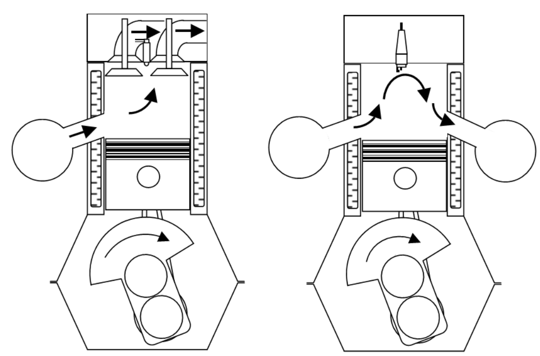


Figure 4

- La phase de respiration nécessite dans ce type de moteur une course complète du piston, sensiblement isobare PMB-PMH, échappement ouvert, pour l'évacuation des gaz brûlés et une course complète sensiblement isobare PMH-PMB, admission ouverte, pour le remplissage en charge fraîche. La combinaison de ces deux courses à celles de la phase motrice porte à quatre le nombre total des " temps" du cycle opératoire complet.
- les moteurs à deux temps (figure 5), dont la respiration s'effectue par balayage des gaz brûlés au moyen de la charge fraîche, pendant une très faible fraction de la course du piston autour du point mort bas. L'évacuation des gaz brûlés est obtenue :
  - ➢ soit par l'ouverture commandée de la (des) soupape(s) d'échappement au moment où le piston arrive à proximité du point mort bas (figure 5a : balayage longitudinal)
  - ➢ soit par l'ouverture des lumières d'échappement pratiquées dans la partie inférieure du cylindre et découvertes à ce moment par le piston (figure 5b : balayage transversal).



a *b*

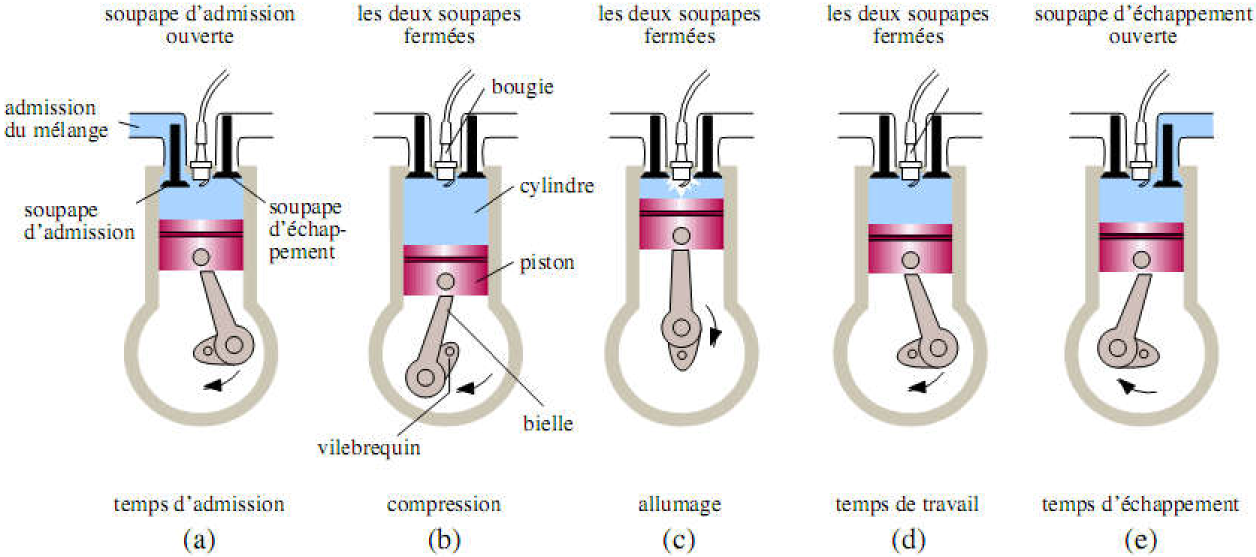
Figure 5

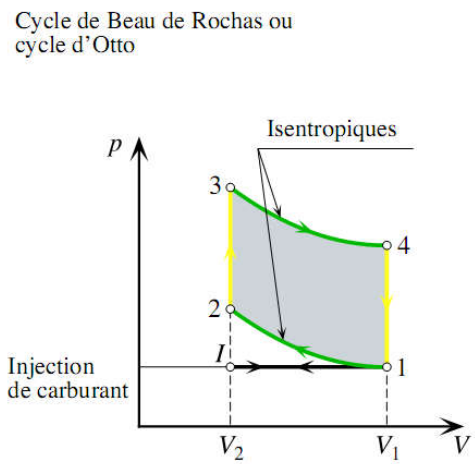
La vidange amorcée se poursuit sous la poussée de la charge fraîche introduite par les lumières d'admission situées tout en bas du cylindre : ces lumières, découvertes alors que le piston atteint sa position extrême PMB, sont alimentées en charge fraîche sous légère pression par une soufflante adéquate. Celle-ci peut être une soufflante centrifuge, une soufflante volumétrique rotative, ou encore la face arrière du piston lui-même, agissant comme « pompe » dans le carter d'embiellage). Pendant la fraction de la course du piston dévolue à la respiration, la pression dans le cylindre est voisine de celle qui règne dans le conduit d'échappement.

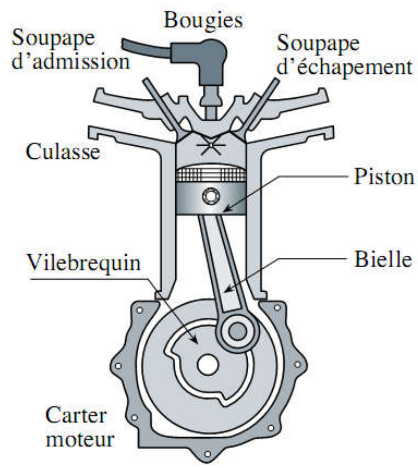
Étude thermodynamique

Cycle de Beau de Rochas ou cycle d'Otto

Le diagramme (p,V) ou diagramme indicateur, dont la surface mesure le travail indiqué, constitue de ce fait l'outil d'analyse thermodynamique de base du cycle réalisé.







Le cycle est décrit en quatre temps :

I→1 Le cylindre admet le mélange à travers une soupape d'admission dans un volume V1.

1→2 Les soupapes étant fermées, le mélange est comprimé isentropiquement u volume V1 au volume V2.

2→3 Explosion du mélange qui augmente la pression.

3→4 Les soupapes étant toujours fermées, les produits de la combustion se détendent isentropiquement en repoussant fortement le piston jusqu'sa position extrême.

4→1 La soupape d'échappement s'ouvre, ce qui diminue brutalement la pression.

1→I Les gaz brulés sont évacués.

L'examen de la seule phase motrice de ces diagrammes conduit à assimiler l'évolution thermodynamique du fluide dans le moteur à combustion interne à un cycle de transformations subies par une masse m invariable de gaz idéal, conformément au modèle de Beau de Rochas. Ce modèle comporte une compression adiabatique 1-2, suivie d'un réchauffement isochore 2-3, puis d'une détente adiabatique 3-4, le retour à l'état initial ayant lieu par un refroidissement isochore 4-1. La figure 6 en illustre les représentations dans les diagrammes pression-volume (p,V) et température-entropie (T,S).

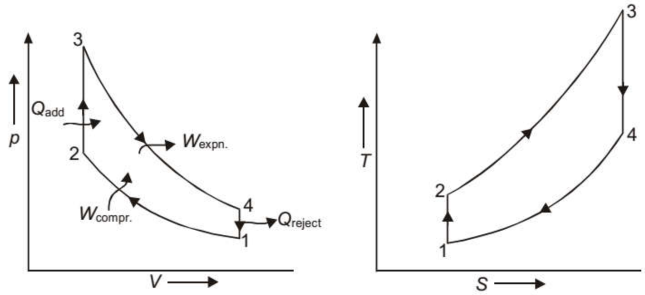


Figure 6 Cycle de Beau de Rochas (Otto)

Le rapport de compression volumétrique est défini par

$$r = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

La transformation 2-3 est isochore, d'où d'après le premier principe,

$$\Delta U_{2-3} = Q + W \qquad avc \quad W = 0 \;\; car \; \Delta V = 0$$

La quantité de chaleur massique absorbée par le fluide est :

$$q_{add} = Cv.(T_3 - T_2)$$

Et la puissance absorbée est

$$\dot{Q}_{add} = \dot{m}_c.PCI = (\dot{m}_a + \dot{m}_c).Cvg.(T_3 - T_2)$$

Avec :

$\dot{m}_c$: est le débit massique de carburant

$\dot{m}_a$: est le débit massique de l'air

PCI : est le pouvoir calorifique inferieur de carburant

Cvg : est la chaleur spécifique a volume constant de gaz

De même, l'évolution 4-1 est isochore, la quantité de chaleur massique rejetée vers le milieu extérieur est

$$q_{rej} = Cv.(T_4 - T_1)$$

Le travail net développé par le cycle est

$$w_{net} = q_{add} - q_{rej}$$

Dans ce cas le rendement thermique est

$$\eta_{otto} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{q_{add} - q_{rej}}{q_{add}} = 1 - \frac{q_{rej}}{q_{add}}$$

Si on assimile le fluide moteur comme un gaz parfait

Les évolutions 2-3 et 4-1 sont isochores, d'où

$$V_2 = V_3 \quad et \quad V_4 = V_1$$

Les évolutions 1-2 et 3-4 sont adiabatiques, d'où

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1}$$

Donc :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4}$$

Or

$$1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_4}$$

Ce qui nous donne

$$\frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r^{\gamma-1}$$

Le rendement s'écrit alors

$$\eta_{otto} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{Cv.[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)]}{Cv.(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

Pression moyenne effective

Par définition la pression moyenne effective est définit par

$$pme_{otto} = \frac{w_{net}}{\Delta V}$$

Le travail net est représenté par l'aire de la surface délimitée par les différentes évolutions dans le diagramme P-V

$$w_{net} = \left(\frac{P_3.V_3 - P_4.V_4}{\gamma - 1}\right) - \left(\frac{P_2.V_2 - P_1.V_1}{\gamma - 1}\right)$$

Or

$$w_{net} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_4.V_4\left(\frac{P_3.V_3}{P_4.V_4} - 1\right) - P_1.V_1\left(\frac{P_2.V_2}{P_1.V_1} - 1\right)\right)$$

D'une autre part

$$\begin{cases} V_2 = V_3 \quad et \quad V_1 = V_4 \\ r = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} \end{cases}$$

Et encore, si on suppose que

$$\begin{cases} V_2 = V_3 = 1 \quad i.e \quad l'unité \ de \, mesure \, est \, le \, volume \, mort \\ V_1 = r \quad et \quad V_4 = r \end{cases}$$

D'où

$$w_{net} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_4.r\left(\frac{P_3}{P_4.r} - 1\right) - P_1.r\left(\frac{P_2}{P_1.r} - 1\right)\right)$$

Pour les évolutions adiabatiques, on a

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_4} = r^{\gamma}$$

D'où l'expression de travail net est

$$w_{net} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_4.r(r^{\gamma-1} - 1) - P_1.r(r^{\gamma-1} - 1)\right)$$

Or

$$w_{net} = \frac{1}{\gamma - 1}(r^{\gamma-1} - 1).(P_4 - P_1)$$

Finalement, l'expression de pression moyenne effective est donnée par

$$pme_{otto} = \frac{r.(r^{\gamma-1} - 1).(P_4 - P_1)}{(V_2 - V_1).(\gamma - 1)} = \frac{r.(r^{\gamma-1} - 1).(P_4 - P_1)}{(r - 1).(\gamma - 1)}$$

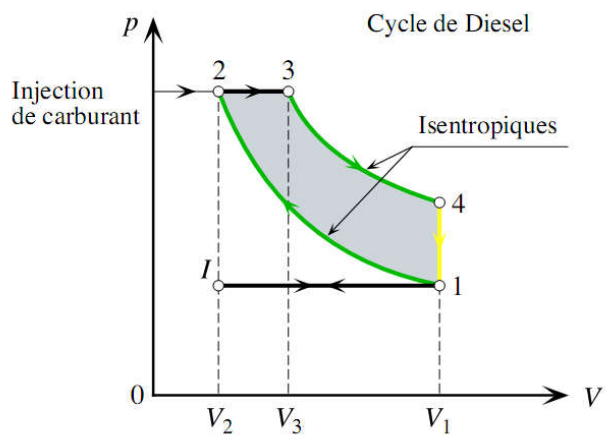
Si on suppose $\frac{P_4}{P_1} = \alpha$

Donc, on aura

$$pme_{otto} = \frac{r.(r^{\gamma-1} - 1).P_1.(\alpha - 1)}{(r - 1).(\gamma - 1)}$$

Cycle Diesel (Moteur à allumage par compression)

Le moteur Diesel est un moteur à combustion interne dont l'allumage n'est pas assuré par des bougies mais par une compression élevée, ce que l'on réalise sans risque en comprimant l'air seul et en injectant le carburant au point 2 du diagramme. Ce moteur a été mis au point par l'Allemand R. Diesel en 1893, fortement motivé par la recherche d'un moteur thermique fonctionnant avec un combustible rudimentaire, moins raffiné que l'essence. Le cycle ressemble à celui du moteur à explosion, mais la portion isochore 2−3 est remplacée par une isobare car, dans le moteur Diesel, le combustible est injecté sous pression en 2, de façon assez progressive.



Le cycle a six étapes et le piston fait deux montées et deux descentes, comme dans le cas précédant on parle d'un moteur à quatre temps :

I→1 Le cylindre admet l'air seul à travers une soupape d'admission dans un volume V1.
1→2 Les soupapes étant fermées, l'air est comprimé isentropiquement jusqu'au volume V2.
2→3 Les soupapes étant toujours fermées, on introduit le combustible en 2 et la combustion a lieu.

3→4 Les produits de la réaction se détendent isentropiquement en repoussant fortement le piston jusqu'à la position extrême.
4→1 La soupape d'échappement s'ouvre, ce qui diminue brutalement la pression.
1→I Les gaz brulés sont évacués.

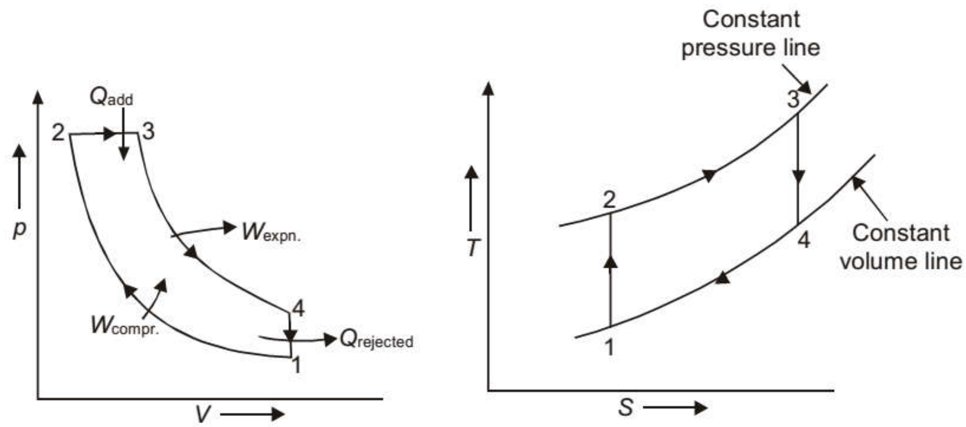


Figure 7 Cycle de Diesel

La transformation 2-3 est isochore, d'où d'après le premier principe, la quantité de chaleur massique absorbée par le fluide est :

$$q_{add} = Cp.(T_3 - T_2)$$

Et la puissance absorbée est

$$\dot{Q}_{add} = \dot{m}_c.PCI = (\dot{m}_a + \dot{m}_c).Cpg.(T_3 - T_2)$$

Avec :
$\dot{m}_c$: est le débit massique de carburant
$\dot{m}_a$: est le débit massique de l'air
PCI : est le pouvoir calorifique inferieur de carburant
Cpg : est la chaleur spécifique à pression constante de gaz
De même, l'évolution 4-1 est isochore, la quantité de chaleur massique rejetée vers le milieu extérieur est

$$q_{rej} = Cv.(T_4 - T_1)$$

Le travail spécifique net développé par le cycle est

$$w_{net} = q_{add} - q_{rej}$$

Dans ce cas le rendement thermique est

$$\eta_{diesel} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{q_{add} - q_{rej}}{q_{add}} = 1 - \frac{q_{rej}}{q_{add}}$$

Si on assimile le fluide moteur comme un gaz parfait
Le rapport de compression volumétrique est défini par

$$r = \frac{V_1}{V_2}$$

Ainsi le rapport de détente volumétrique est définit par

$$rd = \frac{V_4}{V_3}$$

Le rapport volumétrique du a la combustion isobare est définit par

$$\rho = \frac{V_3}{V_2}$$

Assimilant le fluide moteur comme un gaz parfait
L'évolution 1-2 est adiabatique, d'où

$$\frac{P_1.V_1}{T_1} = \frac{P_2.V_2}{T_2}$$

Et

$$P_1.V_1{}^{\gamma} = P_2.V_2{}^{\gamma}$$

Combinant les deux équations précédentes, on trouve

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

D'où

$$\frac{T_2}{T_1} = r^{\gamma-1} \ \Rightarrow \ T_2 \ = T_1 . r^{\gamma-1}$$

L'évolution 2-3 est isobare, d'où

$$P_3 = P_2$$

Ou bien

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

Or

$$\rho = \frac{T_3}{T_2} \quad \Rightarrow \ T_3 \ = \rho . T_2$$

D'où

$$T_3 \ = \rho . r^{\gamma-1} . T_1$$

Ainsi pour l'évolution adiabatique 3-4

$$\frac{P_3 . V_3}{T_3} = \frac{P_4 . V_4}{T_4}$$

Et

$$P_3 . {V_3}^{\gamma} = P_4 . {V_4}^{\gamma}$$

D'où

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1}$$

Or

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_2} . \frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2} . \frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

Ce qui nous donne

$$T_4 = T_1 . \rho . r^{\gamma-1} . \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\gamma-1}$$

D'où

$$T_4 = T_1 . \rho^{\gamma}$$

Le rendement s'écrit alors

$$\eta_{diesel} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{Cp.(T_3 - T_2) - Cv(T_4 - T_1)}{Cp.(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\right)$$

Ou encore

$$\eta_{diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\rho^{\gamma} - 1}{r^{\gamma-1}(\rho - 1)}\right)$$

Ou bien

$$\eta_{diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma . r^{\gamma-1}}\left(\frac{\rho^{\gamma} - 1}{\rho - 1}\right)$$

Pression effective moyenne

La pression moyenne effective est définit par $(w_{net}/(V_1 - V_2))$

$$w_{net} = \frac{P_3 . V_3 - P_4 . V_4}{\gamma - 1} + P_2 . (V_3 - V_2) - \frac{P_2 . V_2 - P_1 . V_1}{\gamma - 1}$$

Pour un volume mort est égal l'unité (i.e. : $V_2 = 1$)

$$w_{net} = \frac{P_2 . \rho - P_4 . r - (P_2 - P_1 . r)}{\gamma - 1} + P_2 . (\rho - 1)$$

Or

$$w_{net} = \left(\frac{P_2}{\gamma - 1}\right)[\gamma.(\rho - 1) - r^{1-\gamma}.(\rho^{\gamma} - 1)]$$

D'où

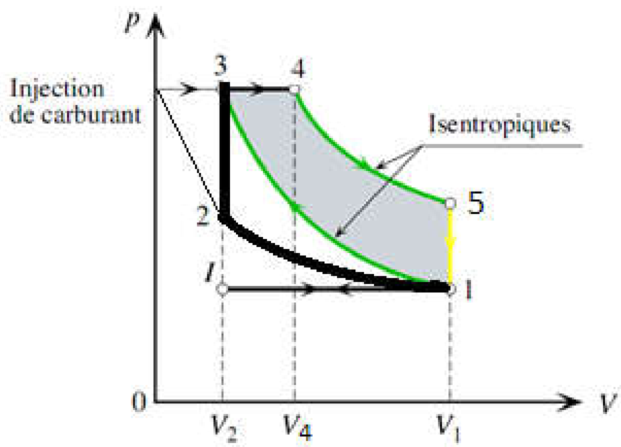
$$pme_{diesel} = \left(\frac{P_2}{\gamma - 1}\right)[\gamma.(\rho - 1) - r^{1-\gamma}.(\rho^{\gamma} - 1)]\frac{1}{(r - 1)}$$

Finalement

$$pme_{diesel} = \frac{P_1.r^{\gamma}[\gamma(\rho - 1) - r^{1-\gamma}.(\rho^{\gamma} - 1)]}{(\gamma - 1)(r - 1)}$$

Cycle de Sabathé (mixte)

Le cycle mixte (de Sabathé) est un couplage entre les deux cycles précédents (Beau de Rochas + Diesel)



I→1 Le cylindre admet l'air seul à travers une soupape d'admission dans un volume V1.
1→2 Les soupapes étant fermées, l'air est comprimé isentropiquement jusqu'au volume V2.
2→3 Les soupapes étant toujours fermées, on introduit le combustible en 2 et la combustion a lieu.
3→4 Les soupapes étant toujours fermées, on introduit le combustible en 3 et la combustion a lieu.
4→5 Les produits de la réaction se détendent isentropiquement en repoussant fortement le piston jusqu'à la position extrême.
5→1 La soupape d'échappement s'ouvre, ce qui diminue brutalement la pression.
1→I Les gaz brulés sont évacués.

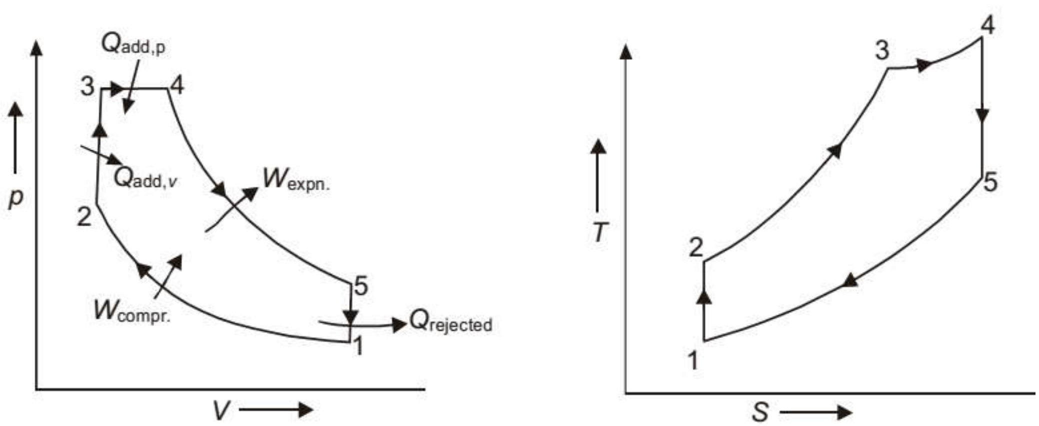


Figure 8 Cycle de Sabathé

Si on assimile le fluide moteur comme un gaz parfait, et que le volume mort est égal à l'unité
Le rapport de compression volumétrique est défini par

$$r = \frac{V_1}{V_2}$$

Le rapport de compression volumétrique dû à l'apport de chaleur isobare est définit par

$$\rho = \frac{V_4}{V_3}$$

Le rapport de compression au cours de l'apport de chaleur isochore est définit par

$$\alpha = \frac{P_3}{P_2}$$

L'apport de chaleur est

$$q_{add} = q_{add,v} + q_{add,p} = Cv.(T_3 - T_2) + Cp.(T_4 - T_3)$$

Et la puissance absorbée est

$$\dot{Q}_{add} = \dot{m}_c.PCI = (\dot{m}_a + \dot{m}_c).[Cvg.(T_3 - T_2) + Cpg.(T_4 - T_3)]$$

Avec :
$\dot{m}_c$: est le débit massique de carburant
$\dot{m}_a$: est le débit massique de l'air
PCI : est le pouvoir calorifique inferieur de carburant
Cpg : est la chaleur spécifique à pression constante de gaz
Cvg : est la chaleur spécifique à volume constant de gaz
De même, l'évolution 4-1 est isochore, la quantité de chaleur massique rejetée vers le milieu extérieur est

$$q_{rej} = Cv.(T_5 - T_1)$$

Le travail spécifique net développé par le cycle est

$$w_{net} = q_{add} - q_{rej}$$

Dans ce cas le rendement thermique est

$$\eta_{mixte} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{q_{add} - q_{rej}}{q_{add}} = 1 - \frac{q_{rej}}{q_{add}}$$

Pour l'évolution adiabatique 1-2, compression adiabatique réversible (isentropique)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Or

$$T_1 = \frac{T_2}{r^{\gamma-1}} = \frac{T_3}{\alpha.r^{\gamma-1}}$$

Pour le processus 2-3, apport de chaleur isochore, on a

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2}$$

Or

$$T_2 = T_3.\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_3}{\alpha}$$

Pour l'évolution 3-4, apport de chaleur isobare

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_4}{T_4}$$

Or

$$T_4 = T_3.\frac{V_4}{V_3} = \rho.T_3$$

Ainsi pour l'évolution adiabatique 4-5, détente isentropique

$$\frac{T_4}{T_5} = \left(\frac{V_5}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

Or

$$T_5 = \frac{T_4}{\left(\frac{V_5}{V_4}\right)^{\gamma-1}} = \frac{T_4.\rho^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}} = \frac{T_3.\rho^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}}$$

Le rendement s'écrit alors

$$\eta_{mixle} = \frac{w_{net}}{q_{add}} = \frac{Cv.(T_3 - T_2) + Cp(T_4 - T_3) - Cv.(T_5 - T_1)}{Cv.(T_3 - T_2) + Cp(T_4 - T_3)} = 1 - \frac{Cv.(T_5 - T_1)}{Cv.(T_3 - T_2) + Cp(T_4 - T_3)}$$

$$\eta_{mixle} = 1 - \frac{(T_5 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \gamma.(T_4 - T_3)}$$

Ou encore

$$\eta_{mixle} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\left[\frac{\alpha.\rho^{\gamma}}{(\alpha - 1) + \alpha.\gamma.(\rho - 1)}\right]$$

Cas particuliers

$$\lim_{\rho\to1} \eta_{mixle} = \eta_{otto}$$

$$\lim_{\alpha\to1} \eta_{mixle} = \eta_{diesel}$$

Pression effective moyenne

Comme dans les cas précédents, la pression effective moyenne est le rapport entre le travail net et la différence de volume entre le début de compression et la fin de compression $(V_1 - V_2)$

$$w_{net} = P_3.(V_4 - V_3) + \frac{P_4.V_4 - P_5.V_5}{\gamma - 1} - \frac{P_2.V_2 - P_1.V_1}{\gamma - 1}$$

Or

$$w_{net} = P_3.(\rho - 1) + \frac{P_3.\rho - P_5.r - P_2 + P_1.r}{\gamma - 1}$$

D'où

$$w_{net} = \frac{P_3.[\alpha.\gamma.(\rho - 1) + (\alpha - 1) - r^{1-\gamma}.(\alpha\rho^{\gamma}.1)]}{\alpha.(\gamma - 1)}$$

Pour un volume mort est égal l'unité (i.e. : $V_2 = 1$)

$$pem_{mixte} = \frac{1}{r - 1}\left[\frac{P_3.[\alpha.\gamma.(\rho - 1) + (\alpha - 1) - r^{1-\gamma}.(\alpha\rho^{\gamma}.1)]}{\alpha.(\gamma - 1)}\right]$$

Finalement

$$pem_{mixte} = \frac{P_1.r^{\gamma}.[\alpha.\gamma.(\rho - 1) + (\alpha - 1) - r^{1-\gamma}.(\alpha\rho^{\gamma}.1)]}{(r - 1).(\gamma - 1)}$$